CULTURA E CONCEITUALIZAÇÃO: NÃO HÁ UMA SEM A OUTRA[1]

Gérard Vergnaud[2]

Resumo: *O presente artigo visa ilustrar a necessidade de uma análise conceitual das práticas culturais e profissionais. Existem sempre conhecimentos importantes nas práticas, no caso, nas práticas matemáticas dos camponeses siamous (de Burkina Fasso) e nas aprendizagens de futuros operários da construção, alunos de LEP na região parisiense. Além desses exemplos, coloca-se a questão propriamente didática do uso dos saberes cotidianos no ensino, e a das relações suscetíveis de serem estabelecidas com o saber avançado.*

A importância da cultura para a escola não precisa ser demonstrada. Ao contrário, o que não está claro é a maneira, ou melhor, "as maneiras" pelas quais a escola se inspira ou pode se inspirar na cultura: por exemplo, entre a transposição em aula dos conhecimentos matemáticos do cotidiano e a transposição das ideias de alto nível dos matemáticos profissionais de hoje; ou ainda, entre a literatura, mais ou menos jornalística das bancas de revistas das estações, e as obras marcantes que formam o patrimônio literário da humanidade, de Sófocles a Rimbaud, passando por Shakespeare, Cervantes, La Fontaine ou Victor Hugo. As duas abordagens fazem sentido e deveriam poder ser combinadas; mas como?

A cultura é múltipla e é um erro dela não ver seu conteúdo conceitual profundo, em razão de uma concepção muito estreita, seja aristocrática (que se volta às manifestações mais excepcionais da ciência, da literatura, da música e das artes), seja antropológica (que se volta sobretudo às diferenças entre culturas de diferentes comunidades, especialmente por meio das lacunas que elas

[1]Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e de Maria Tereza Carneiro Soares, do original em francês: Vergnaud, G. (2008). *Culture et conceptualisation; l'une ne vas pas sans l'autre*. Carrefours de l'Éducation, 2 (26), 83-98.
[2]Diretor emérito de pesquisas no CNRS (Centro Nacional de Pesquisas Científicas da França). Equipe: *Concepção, criação, competência e usos*, Laboratório *Paragraphe,* Universidade de Paris 8.

exprimem em relação às culturas dominantes). Culturas variadas coexistem em uma mesma sociedade, mas existe também uma cultura partilhada por todos, como é o caso na França: os hábitos do cotidiano, as instituições, notadamente a escola, contribuem para a formação de uma cultura partilhada. Provavelmente, é no âmbito da escola que se tem mais chances de estabelecer os laços entre as duas faces da cultura: aquela das disciplinas universais e aquela das especificidades culturais e profissionais, uma vez que elas se formam sempre de culturas contrastantes; em função dos bairros e das regiões, das religiões, das línguas faladas em casa, dos valores transmitidos pelas famílias e, também, das atividades profissionais e do nível de formação dos indivíduos.

A presente contribuição é de um estudioso da psicologia do desenvolvimento e da didática da matemática, não a de um antropólogo. A questão principal que aqui abordo é a da reconciliação ou, simplesmente, a da conciliação entre uma matemática avançada e uma matemática útil aos futuros profissionais que serão operários, técnicos, agricultores, comerciantes, e os "cotidianistas", entendendo-se, por este neologismo, todos os usuários das matemáticas no cotidiano que somos todos nós, em um ou em outro nível. Vigotski, de certo modo, tratou essa questão em sua época, opondo a formação dos conceitos científicos ou acadêmicos, aos conceitos cotidianos. Ele designava, então, os contrastes entre a formação dos conceitos científicos e a dos conceitos cotidianos, invocando o respectivo papel da linguagem no desenvolvimento dos conceitos científicos e aquele da experiência no desenvolvimento dos conceitos cotidianos, o caráter local destes últimos como oposto ao caráter geral dos conceitos científicos e, enfim, o fato de que os conceitos científicos diferentemente dos conceitos cotidianos, formam sistemas (Vygotsky, 1985 *apud* Vergnaud, 2000). A matemática empregada em certas comunidades africanas é um bom exemplo de matemática do cotidiano, muitas vezes associadas a práticas profissionais ou quase profissionais. Ela é, também, referência interessante para uma reconciliação entre cultura e conceitualização.

O EXEMPLO DOS CAMPONESES SIAMOUS

As análises expostas a seguir são emprestadas da tese defendida por Kalifa Traoré "*A matemática dos camponeses*", a qual descreve e analisa as práticas matemáticas dos camponeses siamous, que habitam vilarejos de uma pequena região de Burkina Fasso. Das inúmeras observações recolhidas por Traoré, vou focalizar aqui o caso da venda de mangas e o da construção de cabanas.

A contagem e a venda de mangas

No que concerne às situações de avaliação em que essa venda ocorre, destaco dois fenômenos singulares: o primeiro é que as quantidades de mangas são contadas na árvore antes de serem elas colhidas pelo comprador, e são objeto de uma avaliação direta em "dinheiros", enquanto poderiam elas, naturalmente serem contadas antes de se calcular seu preço; o segundo fenômeno interessante é que o sistema de numeração siamou comporta vários tipos de agrupamentos, os quais não são potências de dez. Para complicar a situação, há agrupamentos diferentes para o dinheiro e para as quantidades discretas que são as mangas.

Um "dinheiro" é uma unidade monetária corrente que representa 5 francos CFA[3] e que corresponde a uma nota de 5 francos. Mas, quando se trata de contar quantidades discretas (as "coisas" como dizem os siamous), são outros agrupamentos que são normalmente empregados: *fu* (dez), *kar* (vinte) permitem contar até vinte e nove, justapondo-se ao agrupamento de dez ou ao agrupamento de vinte as palavras correspondentes aos nove primeiros números. É o que os siamous chamam de "contagem pequena". Para contagens maiores, até duzentos, pode-se utilizar a base vinte (cinco vintes, seis vintes, sete vintes) e empregar uma palavra nova "*kpénlkpénin*" (cujo valor é sessenta), o que, por esse fato, constitui um novo agrupamento: 180 se torna então 160 e 20, e 190 se torna 160 e 30. A partir de 200, e até 400, tem-se um novo sistema, o qual obedece ao mesmo princípio que o da contagem pequena. Uma particularidade suplementar é que o símbolo "*e*" da composição aditiva não o mesmo ao longo do sistema: "*ami*" para pequenas quantidades que são as unidades, "*ato*", para quantidades maiores que são agrupamentos diferentes. 400 é um novo agrupamento, que pode ser composto aditivamente com números inferiores de 200 até 800, e este pode também ser expresso como duas vezes 400. As quantidades de dinheiro se expressam seja em "*dinheiros*", com o significado acima apontado de 5 francos CFA, seja em unidades equivalentes da língua dioula, com a particularidade de que o dioula não é utilizado para números inferiores a 29. Em siamou, utiliza-se também uma palavra correspondente a "*um monte*" para falar de vários agrupamentos de mesma natureza, por exemplo: "*vinte dinheiros em dois montes*" quer dizer 40 dinheiros. Da mesma forma, *karkweeln* (100) é composto de "*cinco vintes*". Para números maiores, os siamous empregam ainda outros agrupamentos, como "*cabra*", para 1000 (construído como 800 mais 200) e "*mãe serpente*", para um milhão (desta vez, trata-se de francos CFA).

Não é necessário um longo comentário para se notar que as composições aditivas e multiplicativas se aplicam a muitos tipos de unidade e de agrupamentos, um pouco como em francês: a data "*dix sept cent quatre ving neuf*" (mil setecentos e oitenta e nove) é estruturada por

[3]CFA- Comunidade Financeira Africana: grupo países da África Ocidental com uso comum de moeda. N.T.

formas tanto aditivas “dix sept” (dez mais sete), como multiplicativas “dix sept cent quatre vingt” (dez mais sete vezes cem, quatro vezes vinte) e, novamente, aditivas “quatre vingt neuf” (quatro vezes vinte, mais nove).

A venda de mangas é uma situação menos complexa do que a da venda de cereais, na qual intervém a medição (efetuada, aliás, em volume e não em peso). Porém, estranhamente as mangas, que poderiam ser, primeiro, contadas antes de a elas se atribuir um preço, são diretamente associadas ao seu valor monetário, de tal sorte que o número efetivo de mangas é, pura e simplesmente, ignorado pelas pessoas encarregadas da avaliação. Reconhece-se, nisto, o fato de que as propriedades do isomorfismo da função linear estão solidamente inscritas nos esquemas dos camponeses e dos comerciantes: resulta na mesma coisa contar diretamente mediante preços ou com os objetos cujo preço é conhecido:

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \qquad\qquad kf(x) = f(kx)$$

A construção de cabanas

Os siamous não empregam qualquer instrumento de geometria como compasso, esquadro, embora sejam estes instrumentos perfeitamente adaptáveis à construção de cabanas redondas (destinadas às mulheres) e a cabanas retangulares (destinadas aos homens). Eles tampouco medem comprimentos (raio do círculo ou lados do retângulo). Mas praticam uma avaliação direta, a partir de um modelo. Eles não medem os ângulos e, aliás, não têm instrumento para tal. Para ser breve, focalizarei a respeito duas práticas, interessantes do ponto de vista matemático. A primeira se refere ao fato de que o teto tem uma inclinação que deve ser levada em conta quando é ele fabricado. Um lugar é reservado para esta fabricação, ao lado das paredes já montadas da cabana. Os bambus empregados devem ser mais compridos que o raio da cabana circular, ou que os das metades da cabana retangular. Para assegurar-se disto, os siamous pegam, primeiro, um tronco de bambu muito comprido e o colocam em posição; depois, o cortam conforme a dimensão desejada. Buscam, assim de maneira pragmática, sem instrumento de medida, a dimensão ótima. Para os tetos das casas retangulares, entretanto, eles se concedem um pouco mais de margem, começando pelos bambus mais compridos, os que vêm em diagonal.

Exatamente as diagonais são utilizadas para resolver um problema de ângulo, desde o traçado do plano da cabana retangular, antes da construção das paredes: se isto não é levado em conta, na verdade se pode, mesmo tomando as precauções necessárias relativas aos lados do retângulo (lados opostos iguais), defrontar-se com ângulos desiguais, obtusos para alguns, agudos para outros, de qualquer modo não respeitando a propriedade característica dos retângulos, que é a de ter quatro ângulos retos. De fato, todos os paralelogramos têm lados opostos iguais. Ora, os retângulos têm uma outra propriedade característica além de seus quatro ângulos retos, o que os distingue dos demais paralelogramos, que é a de ter diagonais iguais. É justamente esta propriedade que os siamous empregam para controlar os ângulos; e, de fato, pode-se vê-los tomar, com uma corda, a medida de uma diagonal e aplica-la à outra. Podem, então, ajustar os ângulos para que esta propriedade das diagonais do retângulo seja respeitada e, em consequência, aquela dos quatro ângulos retos. Traoré expressa o seguinte teorema-em-ato "as diagonais de um retângulo são iguais; a forma intermediária, aquela que tem seus lados opostos iguais, torna-se um retângulo se suas diagonais são igualizadas".

Vê-se, com esses dois exemplos, o da venda de mangas e o da construção das cabanas, que as práticas cotidianas dos siamous se alimentam de conceitualizações que estão longe de ser triviais, e que representam, mesmo, conhecimentos de alto nível, os quais podem ser descritos em termos que não seriam recusáveis por professores comuns de matemática, desde que não sejam eles surdos à etnologia.

UMA EXPERIÊNCIA EM UM LEP[4] NA FRANÇA

Desejo propor e ilustrar aqui uma orientação muito diferente daquela oferecida por Vigotski: juntar duas finalidades, a meu ver complementares, que se pode perseguir quando se ensina matemática a alunos que não se destinam a atividades científicas e técnicas que impliquem matemática sofisticada; de um lado, fornecer-lhes conhecimentos e raciocínios diretamente utilizáveis em sua profissão; de outro, levá-los a uma consciência muito clara das razões matemáticas da eficácia das técnicas ensinadas. A sugestão é a de partir de situações fortemente contextualizadas pelas finalidades profissionais ou quase profissionais e de, ao mesmo tempo, associar-lhes uma análise conceitual de bom nível, permitindo-lhes fazer a ligação com matemáticas mais avançadas.

Na verdade, os alunos dos liceus profissionais e dos centros de formação de aprendizes não são os únicos envolvidos em uma empreitada como a que vou esboçar. O que, por hipótese, pode ser fecundo para alunos que não têm um gosto particular pela matemática, pode também ser fecundo para alunos do "ensino geral", que não rejeitam a matemática, mas que, por conta disso, nelas não percebem uma ancoragem funcional, a qual, entretanto, contribui para lhe dar sentido. Sabe-se bem que um aluno pode ter sucesso sem imaginar todas as implicações daquilo que lhe é ensinado, nem quanto ao seu valor intelectual, nem quanto à sua função social. Porém, isto é prejudicial a todos, justamente do ponto de vista da cultura.

[4]LEP – *Lycée d'Enseignement Professionnel* (Liceu de Ensino Profissional, no sistema de ensino francês). N.T.

Vigotski certamente tinha razão quando pensou o desenvolvimento da criança em termos de apropriação da cultura e não somente em termos de construção individual. Ele também tinha razão quando deu destaque ao papel do adulto (logo, do professor) como mediador, e o papel importante dos signos e das formas simbólicas nos processos de apropriação. Resumindo, pode-se dizer que os signos, linguísticos e não linguísticos, são exatamente o que remete a uma referência partilhada na comunicação; por essa razão, eles são um instrumento importante de passagem da cultura, entre a comunidade adulta e o sujeito em desenvolvimento, mesmo se eles dela não sejam o único instrumento. A pesquisa em didática nos ensinou, de fato, que as situações construídas pelo professor para fins de aprendizagem e de tomada de consciência, são também um instrumento de apropriação da cultura. A presente contribuição tenta combinar o emprego dos dois instrumentos, situação e simbolismo.

Primeiro exemplo: O objetivo era o de permitir aos alunos do 4º ano do liceu profissional se familiarizar com certos cálculos de construção civil e, ao mesmo tempo, melhor captar as propriedades da proporcionalidade, especialmente fazer a diferença entre a composição por concatenação de várias funções lineares, quando a chegada da precedente serve de partida à seguinte, e a composição por produto de duas funções lineares, quando uma variável é proporcional a cada uma de duas outras variáveis, independente entre si.

São apresentadas aos alunos as informações seguintes:

O senhor Joaquim, empresário da construção civil, faz um contrato para a construção de 25 casas: 12 F4, 8 F5 e 5 F6. Eis as especificações das casas:

Tipo de casa	*superfície habitável*	*superfície ocupada*	*sapatas*
F4	*75m2*	*84,3 m2*	*45,1 m*
F5	*84 m2*	*94,6 m2*	*48,7 m*
F6	*103 m2*	*115,24 m2*	*55,9 m*

Como o foco está na construção das sapatas, são também dadas informações complementares:

A seção das sapatas é de 40 cm por 50 cm para os três tipos de casas.

Essa primeira informação requer um comentário para o leitor desavisado: os profissionais da área da construção civil sabem que as fundações de uma casa do tipo F4, F5 e F6 têm uma seção de sapata constante: “sapata” é o termo técnico usualmente empregado para a fundação. Como sua seção é constante, é suficiente, para os profissionais, conhecer-lhes o comprimento; este está informado no quadro acima.

Mas outras informações são igualmente fornecidas, as quais são indispensáveis para que os alunos cheguem ao processo de solução.

Para fazer um m3 de concreto armado, são necessários 1500 kg de brita, 580 kg de areia e 250 kg de cimento.

Os preços desses materiais, na época, eram 43 francos para 1000 kg de brita, 40 francos para 1000 kg de areia e 25 francos para 50 kg de cimento.

Em 5 dias de trabalho de 8 horas dois operários fabricaram, em média, 90 m de sapata.

A atividade dos alunos foi organizada em três momentos:

- uma fase de elaboração coletiva de três ou quatro perguntas em pequenos grupos de alunos (a formulação ocasiona trocas de ideias e discussões);
- depois, uma fase de compartilhamento e de comparação das perguntas produzidas pelos diferentes grupos (por exemplo, trata-se de perguntas diferentes ou de formulações diferentes da mesma pergunta?);
- enfim, uma fase de localização das perguntas, umas em relação às outras, em um quadro desenhado no quadro de giz, elaborado progressivamente: qual é do mesmo tipo? Qual é diferente? Como colocar as perguntas em um quadro cujas colunas representam grandezas distintas (por exemplo, volume concreto, peso da areia, do cimento ou, ainda, custos...); cada uma das linhas representa uma referência distinta (por exemplo, para um F4, para cinco F6... ou, ainda, para tal quantidade de concreto, ou de areia, ou de cimento...).

Desse modo, a pergunta “Quanto de cimento é necessário para um F4?” e a pergunta “Quanto cimento é necessário para uma tonelada de concreto?” vão na mesma coluna, mas não na mesma linha; ao contrário, a pergunta “Quanto de areia é necessária para uma tonelada de cimento?” vai na mesma linha da pergunta precedente, mas não na mesma coluna. Esta atividade de formulação de perguntas, depois, de colocação dos dados e das perguntas em um quadro é inabitual no ensino da matemática. O objetivo buscado é o de levar os alunos a colocar em relação as formas linguísticas e suas variações com as grandezas em jogo, desconhecidas ou dadas.

Em um segundo momento, os alunos são convidados a responder a certas perguntas e a colocar, então em ação os diversos meios pelos quais se pode calcular uma ou outra grandeza. É nesse momento que são colocados em ação os esquemas e os invariantes operatórios pertinentes (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato). Eles são numerosos; também, uma parte da atividade vai ser consagrada à comparação de caminhos alternativos que levam ao mesmo resultado.

Principalmente, o professor vai tentar que os alunos tomem consciência, por meios linguísticos e por representações gráficas *ad hoc*, das semelhanças e das diferenças entre os raciocínios registrados. As observações aqui reportadas são uma contribuição à pesquisa das relações entre linguagem e pensamento, e à das relações entre a matemática do cotidiano profissional e a matemática acadêmica.

1. Problemas de enunciação

Primeiramente, eis alguns exemplos das dificuldades encontradas pelos alunos.

Como formular a ideia do todo?

"Qual é o comprimento total das sapatas pata o conjunto de todas as casas?"

São necessárias nada mais que três expressões para este aluno formular a ideia do todo: comprimento total, o conjunto, de todas as casas.

Felizmente, existem formulações mais econômicas:

"para as sapatas de todas as casas",

"o necessário para a fabricação do conjunto das sapatas",

"o necessário para a fabricação das sapatas",

"para todas as sapatas",

"o comprimento total das sapatas"

Mas, observa-se, ao mesmo tempo, que o quantificador pode se referir a três tipos de objetos: casas, sapatas, comprimento das sapatas.

Como suprimir a confusão e diminuir a redundância?

Outra dificuldade concerne ao fato de que os alunos se referem, ao mesmo tempo, sem dissociá-las, a grandezas distintas como a quantidade de concreto e seu custo; daí formulações equivocadas como a seguinte: "Qual será o custo total em metros cúbicos de concreto?"
ou, ainda, a ideia de custo é expressa duas vezes: "Quanto custará o preço...?"

A redundância pode, também, tomar a forma de repetição: logo depois de ser enunciada a referência a "todas as sapatas", um aluno propõe a pergunta: "Qual será o preço de todas as sapatas?". Ele é, então, corrigido por outro aluno de seu grupo: "Qual será o preço delas?". Os três alunos do grupo observado se manifestam, então, com ênfase para destacar a sofisticação e a economia que a anáfora "dela" representa. Este é um exemplo raro de tomada de consciência referente à enunciação.

A destacar que nenhum aluno assinala a diferença entre "custo" e "preço".

Qual é o invariante?

"Calcular a massa volúmica de uma sapata em concreto para uma F4? Para uma F5? Para 12 F4?"

O autor dessa série de perguntas está, evidentemente, preocupado em atribuir a mesma pergunta a diversos valores paradigmáticos (um F4, um F5, 12 F4); mas, ele toma então como variável possível, uma grandeza, a massa volúmica, inconvenientemente como invariante.

Isto ilustra as relações delicadas que existem entre conceitualização e formulação.

Outro exemplo é fornecido pela atividade combinatória à qual se dedicam os alunos, durante a fase de compartilhamento, especialmente no momento de estabelecer um quadro representando alguma classificação dos dados e das perguntas.

Não é muito difícil para os alunos de 4º ano[5], mesmo quando enfrentam dificuldades escolares, atribuir a mesma categoria de perguntas para diversas quantidades de mesmo tipo:

"*Que quantidade de cimento é necessária para uma F4? depois para 12 F4? Depois, para uma F5?"*

É mais delicado operar esta atribuição para grandezas de tipo diferente:

"*Que quantidade de cimento é necessária para uma F4? depois, para um metro cúbico de concreto? Depois, para 1000 kg de areia?"*

Ou, ainda, atribuir, para uma mesma referência, perguntas relativas a grandezas diferentes:

"Quanto de areia é necessária para 12 F4? Depois, quanta brita para 12 F4? Depois, quanto de cimento para 12 F4?"

Numerosas tomadas de consciência surgem, então, dos alunos: as perguntas de alguns, inesperadas para outros, provocam o despertar da possibilidade de variações sistemáticas. Um aluno chegou mesmo a formular um comentário digno de um linguista:

"Pode-se variar os diferentes valores..., por exemplo, ... da frase."

A palavra "valor" é, exatamente, o termo usado por Saussure. O aluno não podia sabe-lo, evidentemente: de fato, ele considerou as grandezas em jogo. Porém, esta metáfora feliz não deixa de ter relação com a ideia teórica de Saussure, de variação dos diferentes componentes do enunciado.

2 – Construção de uma tabela facilitadora da análise

Quando os alunos estão engajados nesta ideia de dupla variação (do tipo de grandeza sobre a qual se refere a pergunta e da grandeza de referência), é possível elaborar uma tabela na qual se

[5] "4º ano": relativo ao ensino profissionalizante na França. N. T.

pode colocar, ao mesmo tempo, e uns em relação a outros, os dados e as perguntas. Pode-se, assim, pedir aos alunos designar o lugar onde tal dado ou tal pergunta será localizado, ou, ainda, formular a pergunta que deverá ser colocada em certo lugar na tabela.

Voltemos ao exemplo das perguntas colocadas acima e o de outras, análogas; iremos designá-las por letras:

A *Que quantidade de cimento é necessária para um F4?*

B *... para 12 F4?*

C *... para um F5?*

D *Qual a quantidade de cimento para um metro cúbico de concreto*?

E *Qual a quantidade de cimento para 1000 kg de areia?*

H *Qual a quantidade de brita para um F5?*

F *Quanto de areia para 12 F4?*

G *Quanto de brita para 12 F4?*

	Quantidades					Custos			
Casas	sapata	concreto	cimento	brita	areia	concreto	cimento	brita	areia
		1	250	1500	580				
			50				25		
			E		1000				40
			1000				43		
1 F4			A						
1 F5			C	H					
1 F6									
12 F4			B	G	F				
8 F5									
5 F6									

A tabela permite aos alunos tomar consciência das duas variações acima evocadas (qual pergunta, em função de quê?); igualmente, de ver que a pergunta D é inútil, uma vez que ela corresponde a um dado e, enfim, de avaliar a defasagem entre o baixo número de perguntas formuladas para cada grupo de alunos (três ou quatro perguntas, no máximo) e o alto número de perguntas diferentes que seriam possíveis de serem formuladas por conta dos lugares vazios no quadro.

Descoberta de uma diferença conceitual

Um incidente crítico surge, então, e ele merece ser comentado porque concerne um problema conceitual fundamental: ele surge a respeito de perguntas que se referem seja ao comprimento das sapatas fabricadas por uma ou outra quantidade de operários durante um ou outro tempo de trabalho, seja à quantidade necessária de operários, seja à quantidade necessária de horas de trabalho necessária.

A primeira sugestão dos alunos é a de buscar colocar essas perguntas na tabela que eles acabaram de compor. Mas isto é impossível por causa do fato de que o comprimento das sapatas fabricadas é, então, função de duas variáveis: o número de operários e o número de horas trabalhadas. A diferença entre função de uma variável e função de muitas variáveis é uma questão teórica essencial, especialmente para a aprendizagem da física; porém, desde a escola elementar, os alunos se defrontam com essa questão com a medida das grandezas espaciais de área e volume, e com alguns casos de proporcionalidade. Do ponto de vista dos processos de conceitualização, é interessante destacar que alguns alunos se empenham em tentar localizar as novas perguntas na tabela cujas propriedades foram, por eles descobertas, enquanto a compunham. Para que eles tomem consciência da impossibilidade daquela localização (e para que, assim, a evidência mude de lado), é preciso uma ajuda substancial do professor: este chama-lhes a atenção para o fato de que a quantidade de operários e a quantidade de horas trabalhadas não são proporcionais entre si e que, consequentemente, estas duas quantidades não podem ser representadas sob a forma de duas colunas paralelas, como é o caso da tabela que acaba de ser composta. Logo, é necessário outro tipo de apresentação.

É o professor que propõe a tabela de dupla proporcionalidade abaixo, no qual o comprimento da sapata fabricada é, ao mesmo tempo, proporcional à quantidade de operários (linha a linha, enquanto a quantidade de horas trabalhadas permanece constante), e à quantidade de dias trabalhados (coluna a coluna enquanto o número de operários permanece constante)

Dias \ Operários	1	2	N	7	10
1	U				
5		90	280		S
T					1400
12				Q	

S *Quantas sapatas 10 operários fabricam em 5 dias?*

N *Quantos operários são necessários para fabricar 280 metros de sapatas em 5 dias?*

T *Quantos dias levam para fabricar 1400 metros de sapatas com 10 operários?*

Q *Quantas sapatas são feitas em 12 dias com 7 operários?*

U *Que comprimento de sapata é feito por operário e por dia?*

O caso das relações entre três variáveis é muito geral; mais frequentemente, essas variáveis não são tomadas em uma relação proporcional; aqui, elas são, e o comprimento das sapatas fabricadas é, ao mesmo tempo, proporcional à quantidade de operários e à quantidade de dias trabalhados; a função matemática pertinente é a função bilinear. No caso da primeira tabela, na qual as quantidades de concreto, de cimento, de brita e de areia, e os respectivos custos são todos proporcionais, a função linear é pertinente, justamente porque uma das variáveis possíveis permanece constante: por exemplo, a quantidade de cimento por metro cúbico de concreto, ou a quantidade de areia por metro cúbico de concreto... ou o custo do cimento, ou o custo da areia... A proporcionalidade simples é um caso particular da proporção dupla.

Além dessa tomada de consciência, cuja importância não deve ser minimizada, os alunos encontram a questão da independência das duas proporcionalidades: da produção em relação à quantidade de operários e à quantidade de dias trabalhados. Eles também têm a ocasião de perceber a relação dialética entre variável e constante, tanto do ponto de vista da enunciação, como do ponto de vista matemático. Não é demais pretender, dessa forma, ter-se estabelecido uma relação de sentido entre a matemática do profissional e a matemática do matemático e, quem sabe, a do epistemólogo.

Problemas de raciocínio de cálculo

Se não houver solução de problema, quer dizer, raciocínio e cálculo, não se pode, de fato, pretender que os conceitos em jogo nas perguntas, na sua enunciação e na organização de suas relações, tenham sido verdadeiramente compreendidos. A fase seguinte do trabalho dos alunos também é decisiva. Os alunos se lançam aos cálculos, às vezes, explicando seus raciocínios, isto é, a razão de suas escolhas, mas, com mais frequência, sem explicitar o que quer que seja, exceto murmurando algumas palavras referentes às grandezas em jogo, raramente, às suas relações. Contudo, é nessas relações que reside a razão dos encaminhamentos seguidos. Eis alguns exemplos destes:

Calcular o comprimento da sapata correspondente a doze F4, multiplicando por 12 o comprimento correspondente a um F4. Este raciocínio é relativamente familiar para os alunos desde o CE2[6], com a restrição de que é preciso aqui aplicá-lo a um número decimal (45,1 metros); o mesmo ocorre para o cálculo do comprimento correspondente a oito F5 (48,7 metros para um F5), ou a cinco F6 (55,9 metros para um F6). O teorema-em-ato colocado em ação nessa primeira operação é, na verdade, o teorema do isomorfismo multiplicativo da função linear

$$F(kx) = kf(x)$$

Salientemos que o número K expressa a relação (escalar) entre grandezas de mesma natureza: entre casas no primeiro membro, e entre comprimentos de sapata no segundo membro. Não será assim em outros raciocínios, a começar por aquele relatado agora.

De fato, a facilidade relativa desse primeiro raciocínio se defronta, imediatamente, com outra dificuldade: como continuar; como passar do comprimento das sapatas ao volume de concreto correspondente, e aos respectivos pesos do cimento, da brita e da areia? O comprimento da sapata é um conceito pragmático e científico ao mesmo tempo, próprio da comunidade dos profissionais da construção civil: desde que a seção das sapatas seja constante, como vimos acima (50 cm por 40 cm), o comprimento é uma informação suficiente para que os pedreiros cumpram sua tarefa. O cálculo do volume de concreto correspondente ao comprimento de sapata de 1 metro consiste, então, em multiplicar este comprimento pela área da seção da sapata expressa em metros: 0,5 x 0,4, ou seja 0,2 m^2. Este conhecimento é, primeiramente, funcional, mas é, também, conceitualmente importante porque representa um novo aspecto da economia da informação, e da diminuição da redundância: a informação útil é o valor fornecido para uma só variável; as constantes não pedem precisão suplementar se são conhecidas na ocupação. A tabela abaixo ilustra graficamente as duas

[6]CE2 – "ciclo elementar 2"- é o equivalente a uma série da escola básica do sistema de ensino francês, atendendo alunos de, aproximadamente, 8 anos de idade.

questões que acabamos de levantar: a multiplicação (vertical) por um escalar, e a relação de proporcionalidade (horizontal) entre duas variáveis:

Casas	sapata em metros	concreto em metros cúbicos
1 F4	45,1	
	$\downarrow$ x 12	
12 F4	$\boxed{}$	
	1metro $\xrightarrow{\text{x } 0,2}$	$\boxed{}$
	$\boxed{}$ $\xleftarrow{/\ 0,2}$	1 metro cúbico

Não é possível evitar uma análise conceitual e epistemológica da cultura profissional, como também da cultura acadêmica.

Retornemos à tabela que reúne as informações relativas à fabricação do concreto: as respectivas quantidades de cimento, brita e areia e seus respectivos custos. Pode-se observar que as quantidades em jogo podem ter uma relação simples, seja com as grandezas de mesma natureza (50kg de cimento e 250kg de cimento, isto é, 5 vezes mais, um número sem dimensão), seja com grandezas de natureza diferente (50kg de cimento e seu custo de 25 francos, isto é, 2 kg de cimento para um franco, quociente de dimensões).

Observa-se que os alunos, em seus raciocínios, levam mais em conta as relações escalares e, em geral, as propriedades de isomorfismo da função linear do que as relações entre grandezas distintas: entre quantidades de materiais e custos, entre quantidades de materiais diferentes ou, ainda, entre o volume de concreto e o comprimento da sapata como acabamos de ver.

Quanto às funções das duas variáveis, já evocadas quando da quantidade de sapata fabricada em função da quantidade de operários e a quantidade de dias trabalhados, um comentário suplementar se impõe. Na verdade, se mantida constante a quantidade de dias trabalhados (uma mesma linha da tabela de dupla proporcionalidade), não é difícil para os alunos ver que se trata de uma proporção simples, análoga àquelas já vistas, e aplicar um raciocínio escalar (*n* vezes mais de operários, *n* vezes mais de sapatas). É o mesmo fenômeno se se mantém constante a quantidade de operários (mesma coluna).

O que perturba os alunos é a variação simultânea da quantidade de operários e da quantidade de dias trabalhados. É, então, crucial fazer os alunos compreenderem que o modo de composição das duas proporcionalidades é, desta vez, aquele do produto, e não aquele do encadeamento, como fora no caso do comprimento da sapata, do volume de concreto, das quantidades de materiais e dos custos.

Este é um ponto que jamais é levantado no ensino habitual da matemática e ele é interessante, na verdade, para os alunos do ensino geral, não somente para os ensinamentos profissionais. Portanto, não é demais propor que exemplos como o aqui exposto sejam introduzidos no ensino geral, para dar um sentido às diferenças e aos parentescos entre proporção simples e proporção dupla ou múltipla, à dependência e à independência das informações entre elas ou das perguntas entre elas, às relações dialéticas entre invariância e variação.

De fato, a produção de sapata é, e de maneira independente, proporcional à quantidade de pessoas N, e à duração J do período de trabalho; logo, ela é proporcional ao produto e, assim, será possível construir e aplicar uma fórmula que coloque bem em evidência este produto:

$$\mathbf{S = k\,N\,J}$$

Pode-se duvidar da vantagem dessa fórmula para os alunos aqui considerados, da mesma forma que se pode recusar a formulação acadêmica do teorema espontâneo utilizado por certos alunos, raros é verdade, quando empregam eles "em ato" as propriedades da função bilinear.

Segundo exemplo: durante uma experiência em turma de 2º ano do CM2[7], colocamos em cena "*a preparação de uma temporada de férias em acampamento de inverno para 50 crianças durante 28 dias*". Pesquisando em documentos à sua disposição, os alunos haviam encontrado a informação "*é preciso contar com 3,500 kg de açúcar por semana para 10 crianças*".

Evidentemente, há diversos tipos de procedimentos:

- Partir do quanto consome uma criança por dia ou de uma criança durante uma semana;
- Raciocinar sobre a proporcionalidade simples duração/consumo;
- Raciocinar sobre a proporcionalidade simples número de crianças/consumo.

Em turmas do CM2, os alunos levam um tempo para adotar um raciocínio e para efetuar os cálculos necessários. Ocorre que um aluno, não particularmente em destaque habitualmente, levanta-se e declara: "*É fácil, 5 vezes e 4 vezes mais, dá 20 vezes mais!*"

[7]Recordando, no sistema de ensino francês, trata-se do CM2, parte da escola básica, atendendo alunos entre 10 e 11 anos de idade, aproximadamente.

Que conhecimento ele empregou? Seria para ele bem difícil formular esse conhecimento em termos mais gerais, justamente, porque se trata de um teorema das funções bilineares:

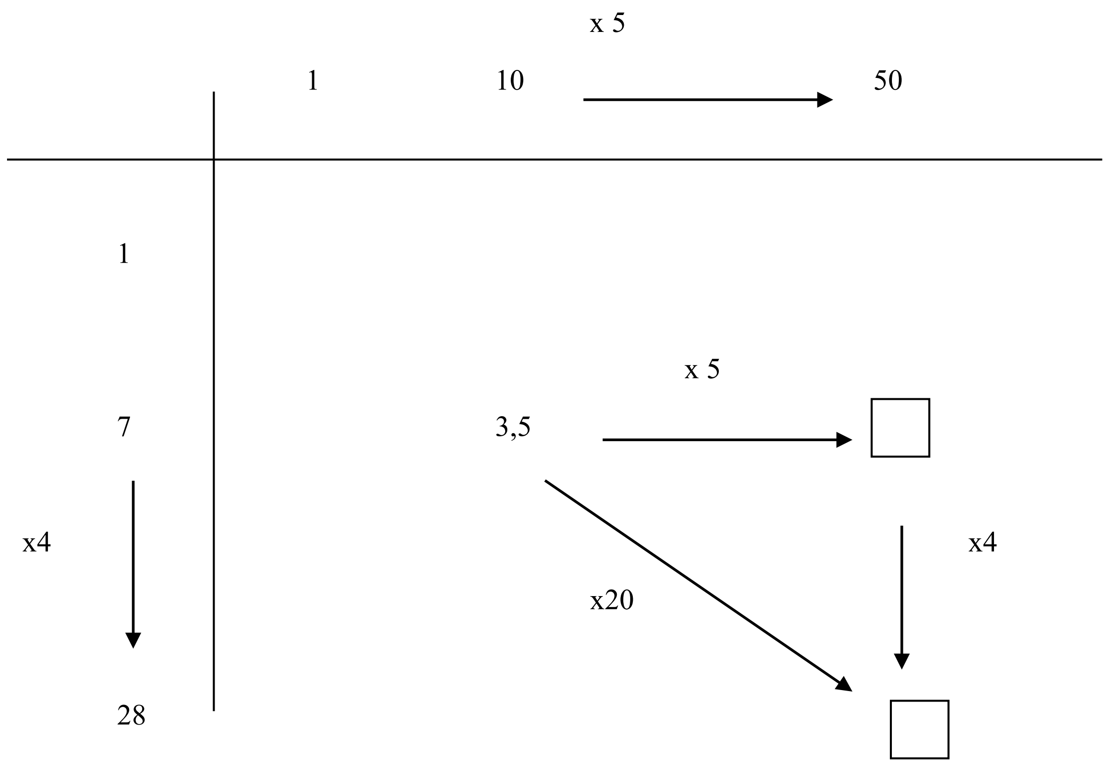
$$f\,(n_1x_1, n_2x_2) = n_1.n_2\, f\,(x_1, x_2)$$

No exemplo em foco

f(5 vezes 10 crianças, 4 vezes 7 dias) = 5 vezes.4 vezes f (10 crianças, 7 dias)

As duas relações escalares 5 vezes e 4 vezes mais são multiplicadas uma pela outra para resultar em nova relação escalar 20 vezes mais.

A questão didática que se coloca é a de representar essa propriedade do raciocínio da criança, propriamente dita, de forma a que ela represente a estrutura de sua intuição; e, para também os demais alunos, de modo a que eles aproveitem este raciocínio singular. É por essa razão que provocamos os alunos com uma tabela suplementar e tentamos com eles analisar-lhe as propriedades.



Como não existe milagre em didática, não é esperado, com isto, que os alunos captem, de imediato o que é uma função de duas variáveis, ou uma dupla proporção. Porém, com um comentário sobre as variações linha por linha e coluna por coluna, é possível familiarizá-los com esses conceitos, novos para a maior parte deles. Já é bastante!

Que lições retirar dessas experiências?

A primeira lição me parece ser a de que a ideia de cultura pede, ao mesmo tempo, a diferenciação entre culturas diferentes que valorizam comunidades distintas e, ao mesmo tempo, a busca de pontes entre elas. A conceitualização refere-se a todas elas, apesar das formas contrastantes que elas possam assumir, na atividade cotidiana dessas comunidades. As coisas são como são, de forma que não se pode falar em uma cultura universal; contudo, ao mesmo tempo, seria um erro de avaliação, e uma renúncia perigosa, deixar escapar ocasiões de se fazer um elo entre a cultura de todos os dias de uma comunidade particular (profissional ou linguística, por exemplo), e a cultura escolar, acadêmica e clássica corrente.

A segunda lição, a meu ver, é que os exemplos interessantes a conservar para enriquecer a base de situações empíricas suscetíveis de serem introduzidas proveitosamente na sala de aula, deveriam ser estendidas a referências e práticas diversas, eventualmente muito afastadas das referências habituais dos professores e dos responsáveis pela educação atual. Os jogos “matemáticos” africanos estão nessa categoria e, aliás, são utilizados com sucesso por alguns professores. A história das ciências, da literatura, das técnicas e das artes fornece também exemplos importantes. Mas a variedade das práticas humanas permanece pouco conhecida, e se está longe, ainda, de captar o benefício que o conhecimento delas possa trazer à escola. A antropologia do saber e das práticas culturais segue, hoje, um domínio pouco explorado, ao menos nos seus possíveis usos para a escola. A transposição didática teria, então, a respeito um bom assunto de reflexão e de proposição.

A terceira lição a destacar concerne a questão, propriamente pedagógica, da relação entre as situações emprestadas de uma cultura tida como não escolar e sua transposição para a sala de aula; e entre as perguntas dos alunos em situação e as propostas de solução e de representação trazidas pelo professor. Este, em seu papel de mediador, não traz somente ocasiões de refletir, de agir e de construir; ele traz, também, soluções, essas elaboradas por outros, além das suas próprias, advindas de sua experiência e de sua capacidade de inovar em situação. As formulações que ele utiliza têm peso, assim como as representações simbólicas, as quais destacam, talvez melhor do que as representações linguísticas, a estrutura conceitual das relações em jogo e os pontos de impacto das operações do sujeito em situação. Tal é o caso dos esquemas, das tabelas, dos gráficos e de outras representações algébricas utilizadas abundantemente, hoje.

Enfim, a última lição refere-se à relação entre a conceitualização que intervém na ação sem ser necessariamente formulada, e o trabalho na linguagem e sobre a linguagem que permite dar uma forma comunicável a essa conceitualização. Essa passagem, de uma forma operatória do conhecimento a uma forma predicativa feita de objetos, de propriedades e de relações enunciadas, é um dos maiores desafios da escola, desde que não seja esquecido o fato de que a cultura é feita de situações, de ações e de práticas, não somente de palavras e de textos. Considerado esse ponto de vista, sem dúvida Vigotski pecou pelo excesso de importância atribuída à linguagem. Sua visão de conceito é, quase exclusivamente, ligada à linguagem: "o conceito é a significação das palavras" repete ele em diversos capítulos de seu livro "pensamento e linguagem". É verdade que ele se corrige no último capítulo, e sublinha, então, que a criança na escola dá às palavras que escuta um sentido que depende de sua experiência; porém, a principal mensagem de Vigotski não é, assim, abalada, uma vez que ele faz da linguagem o instrumento psicológico com o qual o sujeito age sobre si mesmo e se transforma. Assim, são barateadas outras formas de atividade que lhe permitem adaptar-se ao real e que não são redutíveis à atividade linguística, mesmo a interior. Aliás, a interiorização não se refere apenas à linguagem, mas também aos gestos e aos processos perceptivos pelos quais o sujeito seleciona a informação pertinente para a ação e se acomoda aos objetos e às suas propriedades.

No fundo de tudo isso, está em foco uma concepção de representação. A teoria da representação, que nos é necessária para pesquisas sobre o desenvolvimento, a aprendizagem e a experiência, apoia-se ao mesmo tempo, em componentes essenciais que são a consciência e as formas linguísticas, claro! Mas também sobre componentes que não nos fornecem facilmente seu nome, como as formas de organização da atividade, as quais são os esquemas e as categorias de pensamento formadas na atividade. Os invariantes operatórios, em suma, são os ingredientes básicos da conceitualização: sem eles, não é possível ver como as palavras e os enunciados escutados pelo bebê da boca de sua mãe e de seu entorno, bem como aqueles escutados na escola, possam ter sentido. A comunicação verbal é essencial para que a cultura seja apropriada pela criança, mas ela não é tudo nessa apropriação. Por exemplo, os conceitos de sapata, volume, peso, custo, em jogo na situação acima explicada, não teria qualquer sentido se eles não se apoiassem na experiência. Mesmo os de variável e de função tomam seu sentido das possibilidades de variação e de correspondência, das quais os alunos têm alguma experiência, explícita de maneira frágil, é verdade. O fato de colocar palavras nos conceitos é um ato importante. Foi possível mensurar, também, que outras formas simbólicas além da língua, como tabelas, com as diferenças e oposições que elas permitem ocorrer entre linhas, entre colunas, entre correspondências verticais, horizontais, e a dupla correspondência, contribuem também para a conceitualização. Vigotski percebera esse fenômeno quando falou do simbolismo, dando-lhe um sentido mais geral que aquele restrito à linguagem.

Duas outras observações me vêm à mente, relativas à história e à atividade. A cultura tem uma história, e o indivíduo, também. Desse fato resultam evoluções, inovações e descobertas, adaptação ao novo. Da mesma forma, que o psicólogo e o educador, os quais devem levar em conta a duração longa do desenvolvimento do aluno em função da história de suas aprendizagens e de sua vida extraescolar, no mínimo, o historiador (historiador da educação, especialmente) deve levar em conta as transformações dos saberes e das competências que a sociedade espera dos indivíduos. Os processos de adaptação concernem tanto à sociedade e sua cultura quanto aos alunos e aos indivíduos que estão em posição de aprender o que quer que seja em uma formação dedicada à aprendizagem ou pela experiência, estritamente.

Mas, o que é que se adapta? E ao que? É sobre esse ponto que a questão da atividade e de suas formas de organização intervém. De fato, nós nos adaptamos no decorrer de nossa atividade; é necessário, ainda, identificar as formas que se adaptam. São os esquemas que se adaptam e eles se adaptam a situações. De tal modo que as formas de organização de nossa atividade (gestuais, intelectuais, afetivas, sociais, linguísticas) se transformam quando encontram situações novas, retirando suas raízes do repertório existente das formas já construídas. Isto é verdadeiro também para as competências e para os saberes produzidos pela cultura, e seria lamentável dar ao conceito de hábito um sentido tal que nele ver-se-ia apenas a estabilidade e não a evolução. Tal como os esquemas, os hábitos se adaptam.

REFERÊNCIAS

SAUSSURE, F. de (1916). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot.

TRAORÉ, K. (2007). *Des mathématiques chez des paysans*. Montréal: Editions Bande Didactique.

VERGNAUD, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed), *Didactique des Mathématiques*. Lausanne: Delachaux et Niestlé.

VERGNAUD, G. (2000). *Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps*. Paris: Hachette Education.

VYGOTSKI, L. (1985/1934). *Pensée et langage*. Paris: Messidor/Editions Sociales.