A RESPEITO DE FREGE[1]

Gérard Vergnaud - CNRS[2] e Universidade Paris 8

I. INTRODUÇÃO

Frege critica a abordagem psicológica do pensamento porque ela seria o estudo da subjetividade. Não fiquemos surpresos que um psicólogo se dirija, por sua vez, a Frege, para mostrar que seu próprio ponto de vista nada mais é que um ponto de vista sobre a psicologia do pensamento. Também não nos surpreendamos que este artigo seja destinado a especialistas em didática, ou seja, a pesquisadores que se interessam pela aprendizagem, notadamente pelas relações que a ação e o signo conservam durante o desenvolvimento do pensamento, e que alguns especialistas em didática pensem hoje que podem prescindir da psicologia.

Tente eliminar a psicologia, e verá que ela retornará com toda força. É impossível teorizar sobre o pensamento sem ser mais ou menos psicólogo. Frege não escapa a esta regra, e é exatamente a uma psicologia do pensamento que ele nos convida, em seus escritos lógicos e filosóficos, principalmente.

Não se enganem sobre minha intenção. Frege é, a meu ver, um autor importante que contribuiu para esclarecer uma distinção essencial: a que separa uma proposição saturada, como 3+4=7, de uma proposição não saturada, como 3+x=7. Ele pode fazer esta distinção ao mesmo tempo em que introduziu o conceito de função proposicional, inspirando-se no conceito de função numérica: uma função proposicional assume seus valores no conjunto VERDADEIRO/FALSO, assim como uma função numérica assume seus valores no conjunto de números. As ideias de Frege serão retomadas e desenvolvidas por outros lógicos, principalmente por Russel, e conduzirão à ideia, hoje fundamental, de que uma proposição é suscetível de ser verdadeira ou falsa, enquanto que uma função proposicional não o é. Este é um ponto muito importante para a didática da álgebra. É um interessante retorno das coisas: uma ideia sobre a lógica, vinda inicialmente da metáfora algébrica, encontra um ponto de aplicação direto na álgebra.

---

[1] Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares, do original em francês: Vergnaud, G. (2000). A propos de Frege. *Actes de SFIDA (Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre)*. Nice: IREM, v. 3, 27, 1997-99.
[2] Sigla do Centro Nacional de Pesquisa Científica da França.

2. UM PROBLEMA AO AVESSO E PONTOS PROBLEMÁTICOS.

Se tenho a audácia de afrontar Frege, mesmo não sendo um leitor fervoroso de suas obras, é porque o entusiasmo atual que alguns pesquisadores em didática têm por Frege provoca, a meu ver, um sério problema de orientação da pesquisa.

Esquematicamente, podemos dizer que o triângulo de Frege - signo/sentido/denotação - se inscreve em uma problemática que parte do signo e tenta voltar-se para o real, desconsiderando, de certa forma, o movimento inverso, que partiria do real, consideraria a conceitualização como uma característica essencial da ação sobre o real e como uma condição da expressão em palavras e em signos dos conceitos que, assim, emergem durante a atividade. Este não é um problema teórico de pouca importância, pois a resposta condiciona a ação dos professores, o arranjo do cenário didático, e o lugar a ser dado ao simbolismo e ao formalismo.

Percebo duas fraquezas principais na posição de Frege:

- primeiramente, o sentido é pensamento a partir dos signos e não a partir das situações, dos objetos, de suas propriedades, relações e transformações, e da atividade do sujeito. Não é uma posição nominalista, rigorosamente falando, já que Frege não identifica de modo algum a coisa a seu nome; mas ela é um pouco herdeira do nominalismo no sentido de que Frege não parece poder pensar o conceito fora do signo que lhe é associado. Quando dizemos que uma palavra, um enunciado ou um texto tem um sentido ou não tem sentido para um aluno, estamos em uma linha de pensamento totalmente compatível com a abordagem de Frege. Mas podemos dizer também que uma situação, uma relação ou um objeto tem sentido ou não tem sentido. A perspectiva de Frege não permite abordar esta questão. O sentido merece, então, ser abordado por dois lados ao mesmo tempo: pela via das situações e da atividade em situação, por um lado, e pela via da linguagem e dos signos, pelo outro. A meu ver, o signo não ocorre em primeiro lugar.
- em segundo lugar, a denotação não é a última relação do pensamento com o real, pois existe, para além dos objetos que denotam o sentido do signo, um real não totalmente pensado e analisado em objetos e predicados identificáveis, real sobre o qual se exerce a atividade do sujeito confrontado a uma situação, notadamente se ela é nova para ele. Em outros termos, existem processos de conceitualização para elementos e aspectos do real aos quais nenhum signo ainda corresponda. E será sempre assim, por mais vertiginoso que seja o progresso da ciência. Não esgotamos o real; em particular, não esgotamos a necessidade de construir conceitos que permitam dar conta de certos fenômenos e processos, e que não correspondem, entretanto, a qualquer regularidade diretamente observável. O real não é observável, e o construtivismo não é o empirismo (que Frege critica com razão).

Proponho, então, um caminho diferente: partir do real ainda não analisado e categorizado, para ir em direção ao real, parcialmente analisado, ao sentido e, depois, em direção ao signo. Isto não exclui de forma alguma que o signo tenha um efeito de retorno importante sobre os processos de identificação dos objetos do real e de suas propriedades, notadamente no caso dos objetos que não correspondam diretamente a algum invariante perceptivo, como é o caso de vários conceitos matemáticos e científicos. O triângulo de Frege só se fecha, mediante uma relação quase direta entre o signo e a denotação, para os objetos que se tornaram triviais em uma comunidade dada: então, ele não tem mais ambiguidade na referência do signo; isso é muito raro durante a aprendizagem.

Existem, na teoria de Frege, outros pontos problemáticos:

1- em vários trechos de sua obra, Frege fala de relações, até mesmo de relações de relações. Isso é perfeito. Entretanto, ele tem, por vezes, a tendência de reduzir as relações a propriedades unárias. Em seu artigo “Conceito e objeto”, em relação ao exemplo “*2 é um número positivo, 2 pertence a N, 2 é menor que 10”*, ele considera os três predicados *“ser um número positivo”, “ser um número inteiro”, e “ser menor que 10”.*

A utilização, nos três casos, do verbo de ligação “é”, mascara o fato de que se trata tanto de uma relação de ordem entre objetos de mesmo tipo lógico, (2 é menor que 10), como de uma relação de pertença entre um objeto (2) e um conjunto (os números positivos) fundado em uma relação de ordem (2>0), como também de uma relação de pertença entre o objeto 2 e o conjunto dos números inteiros, pela construção deste conjunto, e diferenciação dos inteiros com os números não inteiros. A relação de ordem é transitiva, mas não a relação de pertença, e nem as propriedades associadas. Desde Aristóteles, o verbo de ligação engana os filósofos porque ele é utilizado para expressar predicados unários (o molho está forte), predicados binários (o molho está atrás da garrafa), e predicados com mais de dois lugares (o molho está entre o pão e a garrafa). Isto poderia ter alertado Frege sobre uma epistemologia que toma os signos como ponto de partida.

Na verdade, este exemplo permite a Frege ressaltar, com razão, que os três predicados são, ao mesmo tempo, propriedades do objeto 2, e características do conceito *“número positivo inteiro menor que 10”;* que o conceito não é nem positivo, nem inteiro, nem menor que 10, e que não devemos, então, confundir conceito e objeto. É uma posição prudente! Porém, apesar disso, ela não permite compreender que 2 pode ser objeto aqui e conceito acolá: por exemplo, quando uma criança afirma que tem 2 orelhas, 2 braços, 2 pernas, mas 10 dedos, 2 e 10 têm o status de conceitos, como propriedades de conjuntos, e não de objetos. Esta dialética entre predicados e objetos parece ausente das preocupações teóricas de Frege.

2- a separação radical operada por Frege entre objeto, por um lado, e predicado e conceito, pelo outro, só pode conduzir a teoria do pensamento a um impasse, e isso é tão verdadeiro que, em muitas circunstâncias, os conceitos (no sentido de Frege) se tornam objetos, e os objetos, conceitos. Que um predicado se torne objeto, podemos dar vários exemplos em matemática: *“... é simétrico de ... em relação a...”* é um predicado de três lugares; o substantivo *“simetria axial”* designa um objeto. E, igualmente, a relação de correspondência entre uma distância em um mapa e na superfície real é, primeiramente, um conceito e uma ferramenta; ela se torna um objeto sob o nome de escala.

Inversamente, objetos singulares, designados por nomes próprios, que justamente interessam a Frege, podem se tornar conceitos em algumas condições como, por exemplo, no enunciado “esta criança é um verdadeiro Tarzan”.

3- a visão de Frege é estática e pouco dinâmica. Ele não abre qualquer espaço para o movimento do pensamento em situação, nem para o lento desenvolvimento das categorias que permitem, progressivamente, à criança, compreender e fazer matemática. Uma perspectiva de desenvolvimento é necessária em didática.

3. O QUE EXISTE ANTES DA ÁLGEBRA?

Na álgebra, o peso dos signos e dos símbolos é grande. É normal, então, que nos perguntemos sobre seu sentido. Mas partir dos significantes é tomar inversamente as coisas, enquanto que a álgebra participa fundamentalmente do processo de conceitualização do real, apoiando-se na aritmética, e a superando ao mesmo tempo. Falo, aqui, da álgebra comum. O que mostram as pesquisas, hoje, é que o conceito de número é construído e compreendido a partir de situações que implicam cardinais e medidas, relações e transformações, e que as propriedades da adição, constitutivas do conceito de número, não são redutíveis nem às propriedades de ordem, nem às propriedades das relações de equivalência e de diferença. Da ordem à adição, há um salto. Assim, a adição adquire sentido a partir das duas situações prototípicas que são (i) - a união de dois conjuntos discretos (de cardinal pequeno) e (ii)- o aumento de uma quantidade inicial (de cardinais pequenos). Esta conceitualização não é nem *a priori*, nem puramente analítica.

Frege permanece prisioneiro das categorias kantianas analítica/sintética, e *a priori/a posteriori* mesmo tentando delas se libertar. Ele está aquém da epistemologia construtivista, que permite compreender a conceitualização como um processo inscrito na ação e não somente nos signos, como uma construção, e não somente como uma análise. E a álgebra participa deste processo, como veremos mais adiante.

Existe um salto qualitativo entre a atividade de identificação e de classificação dos objetos, e a que consiste em ordená-los ou seriá-los: é necessário, então, que um dos descritores possíveis seja suscetível de mais e de menos. Igualmente, existe um salto qualitativo entre a atividade de seriação e a de medida, do qual o primeiro caso encontrado pelas crianças é a cardinalização. Se não existem conhecimentos puramente analíticos, também não existem conhecimentos distintos que permitam operações distintas: não adicionamos números de telefone, nem os números das casas de uma rua, mas estes últimos têm um sentido ordinal que não têm os números de telefone. Esse sentido vem das propriedades da ação, e não das do signo. Da mesma forma, a adição não resulta da análise da ordem ou da equivalência, mas de uma construção que se acrescenta à ordem e à equivalência. O próprio Piaget, tão construtivista que era, não compreendeu completamente a ruptura.

4. VOLTEMOS À ÁLGEBRA.

Para dar crédito à ideia de denotação, Frege considera qualquer proposição afirmativa como um nome próprio: assim, $2+3=5$ é um enunciado numérico, solução da equação $2+x=5$. De minha parte, compreendo que, se o sentido já existe em $2+x=5$, a denotação só existe em $2+3=5$, porque a segunda expressão é saturada, mas a primeira, não e, devido a este fato, não é nem verdadeira nem falsa. A terminologia “nome próprio”, utilizada por Frege, é estranha, mas a ideia é interessante porque ela permite distinguir um problema de veracidade de um problema de pertinência: pode ser pertinente se questionar sobre o número desconhecido que, acrescentado a 2, dará 5 como resultado, mas não é a resposta à pergunta, por sua vez, que supõe um julgamento afirmativo (é 3).

A maneira como Frege foi conduzido a esta distinção é surpreendente. De uma maneira análoga à maneira como as funções adquirem um certo valor conforme os valores das variáveis,

seja, $f(x)= 2x+3$	$x=1$	$f(x)=5$
	$x=2$	$f(x)=7$
	$x=3$	$f(x)=9$ etc.

as funções proposicionais adquirem um certo valor de verdade (verdadeiro ou falso) conforme os valores das variáveis a serem instanciadas. Designemos por F a função proposicional correspondente a $2x+3=15$

$2x+3$	é uma função, mas não uma função proposicional
$2x+3=15$	é uma função proposicional, mas não uma proposição
$2.6+3=15$	é uma proposição e ela é verdadeira
$2.5+3=15$	é uma proposição e ela é falsa

De onde, a possibilidade de escrever:

$F(x)$ $2x+3=15$	$x=1$	$F(x)$ = falso
	$x=2$	$F(x)$ = falso
	$x=5$	$F(x)$ = falso
	$x=6$	$F(x)$ = verdadeiro

A expressão literal $2x+3$ não é um enunciado. O enunciado algébrico $2x+3=15$ não é saturado e não é, então, uma proposição. A saturação não torna o enunciado verdadeiro: aqui, somente o valor 6 para a variável x torna o enunciado verdadeiro.

Apenas os enunciados saturados são suscetíveis de verdade ou falsidade. Estas considerações são igualmente pertinentes para os enunciados que comportam variáveis não numéricas, como "É X que matou o farmacêutico". Este enunciado só pode ser verdadeiro ou falso se X for substituído pelo nome de uma pessoa. É, provavelmente este ponto que conduziu Frege a falar de nomes próprios para os enunciados afirmativos.

Estas considerações podem parecer inutilmente sofisticadas, mas precisamos eventualmente delas para entender melhor certas dificuldades dos alunos quando estão aprendendo álgebra. De fato, a aprendizagem da álgebra requer o conceito de função numérica, que permanece ainda implícito na aritmética, na distinção entre uma forma suscetível de verdade ou de falsidade e uma forma que não o é, e, enfim, uma forma sempre verdadeira. Por exemplo, certos alunos pensam que, quando uma expressão contém letras, tem-se uma indecisão no que concerne à sua verdade ou falsidade, que dependeria do valor de x. Ora, se é exato que a verdade de $2x+3=15$ depende do valor de x, este não é o caso para $7.(2x+3)=14x+21$. Também não é o caso para $(x+y).(x-y)=x^2-y^2$. Estas distinções fazem parte do processo de conceitualização em álgebra.

5. QUAL ALTERNATIVA?

Então, o que conservar de Frege? O bom fruto é evidentemente a distinção entre proposição e função proposicional, que abre caminho a reflexões e considerações que não eram possíveis com a teoria dos silogismos. Bem mais problemático é o questionamento dos processos cognitivos a partir da forma predicativa do conhecimento. É necessário, então, tentar partir novamente da atividade em situação e dos esquemas que as crianças, os adolescentes e os adultos desenvolvem quando se deparam com situações novas, preparadas, eventualmente, para eles. São os conceitos de esquema e de concepção que constituem a alternativa exata, do ponto de vista da construção do sentido, dos conceitos de signo e de enunciado. Signos e enunciados são muito importantes, mas ficariam "no ar" se não víssemos que a referência do pensamento não é a denotação do signo, mas o real em via de conceitualização a que correspondem, em primeiro lugar, as formas estabilizadas de organização da atividade que são os esquemas, com os invariantes operatórios que são seu componente epistêmico.

No início, há a ação, e não o verbo. Se o bebê não identificasse objetos no real, com algumas de suas propriedades, relações e transformações, ele nem sequer poderia aprender a falar. Esta identificação não é uma simples codificação de indícios sensoriais, ela é também construção, já que os mesmos objetos mudam de aspecto em alguns deslocamentos de rotação, de translação, de distanciamento ou de aproximação: a começar pela mamadeira. Os mesmos objetos podem desaparecer e reaparecer: o que aconteceu com eles neste ínterim? Certas propriedades físicas dos objetos são compreendidas muito cedo, bem antes de o bebê falar. E quando ele aprende a falar, baseia-se inevitavelmente nas situações e nos objetos que ele reconhece, ao mesmo tempo que em suas emoções e nos indícios gestuais e verbais fornecidos pelo adulto. Ele pode, então, começar a enunciar palavras-frase e combinações linguísticas.

Da mesma forma, guardadas as devidas proporções, a aritmética não começa somente com palavras-número, mas também com as situações de contagem, de comparação e de adição. A notação decimal e as quatro operações só vêm mais tarde; elas trazem, então, enriquecimentos conceituais que não podemos minimizar de modo algum, mas cujo benefício está subordinado ao que a criança está em condições de compreender das diferentes situações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão, situações estas que, sabemos hoje, são numerosas. Ora, estas situações não são habitualmente representadas e diferenciadas por signos. Poderíamos, aliás, remediar parcialmente esta lacuna, já que os signos, mesmo se não aparecem em primeiro lugar, podem ter um papel decisivo na conceitualização.

Na álgebra, os significantes têm um peso forte, e não há álgebra sem os signos que conhecemos: símbolos das operações, das relações de igualdade e de desigualdade, letras. A atividade algébrica comporta, além disso, operações sobre os significantes; e certos behavioristas puderam pensar que elas eram a totalidade da atividade algébrica. Isto não é assim, evidentemente, mas a tentação é sempre grande de reduzir a atividade do pensamento às suas manifestações visíveis. De fato, a álgebra requer vários tipos de atividades: a elaboração da equação, a resolução das equações, a interpretação das soluções, etc. Cada uma destas atividades requer várias formas de organização da atividade, que se enriquecem e se complexificam durante a aprendizagem. Estas formas são os esquemas.

Como um algoritmo, um esquema é composto de vários tipos de componentes:

- um objetivo, sub-objetivos, antecipações,
- regras de ação, de coleta de informação e de controle,
- invariantes operatórios (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato),
- possibilidades de inferência em situação.

Os esquemas de resolução das expressões algébricas (usemos somente este exemplo) colocam em jogo conhecimentos que dizem respeito às funções, suas equivalências e suas identidades, assim como às propriedades de cálculos dos números relativos, dos racionais e dos irracionais. A maior parte dos conhecimentos permanece implícita na atividade: os signos sobre o papel só traçam o resultado da atividade, e não a atividade em si e, ainda menos, os invariantes operatórios utilizados.

Mesmo os "algoritmos-scripts" ensinados, que são uma subcategoria dos esquemas que podemos observar nos alunos, deixam implícitos teoremas essenciais para a legitimidade do procedimento, como podemos ver nos exemplos abaixo: duas versões, uma mais completa, outra abreviada, do mesmo procedimento.

4x+17=65	4x+17=65
4x+17-17=65-17	4x=65-17=48
4x=48	
4x/4=48/4	x=48/4=12
x=12	

Entre a primeira e a segunda linha da primeira sequência de escritos intervém um teorema-em-ato, que muitas vezes passa despercebido: *a igualdade é conservada quando subtraímos um mesmo número dos dois lados,* neste caso, o número 17. Para ser mais exato, seria necessário dizer que *a solução é conservada.*

Antes da terceira linha, intervêm duas outras formas de teoremas-em-ato: *17-17=0 e 4x+0=4x*. E assim por diante.

Estes teoremas são triviais, mas não para todos os iniciantes. Ora, eles condicionam a escolha das operações a serem feitas para se aproximar da solução. A tentação é grande de condicionar os alunos a usar o procedimento sem explicá-lo muito e, mesmo, de passar diretamente para a versão abreviada da direita.

Se, então, propusermos aos alunos a equação

65-4x=17

que tem a mesma solução que a equação anterior, vemos os alunos hesitarem e confundirem-se. Uma das razões desta hesitação é que a ideia de acrescentar 4x dos dois lados não é natural: não é mais um número, mas uma função, cujo valor não conhecemos. Como podemos acrescentar algo que não conhecemos?

O esquema tem um alcance local. Se sairmos dos limites do desenho de um objeto tridimensional projetado em um plano bidimensional, a regra aprendida perde seu sentido, mesmo que ela seja compreendida em alguns casos ilustrativos. O algoritmo geral do professor se tornou um esquema pessoal do aluno, cujo sentido é condicionado pelos valores das variáveis da situação: aqui, são os números e as funções cujo valor é desconhecido no momento de escolher a operação. O algoritmo é efetivo; o esquema muitas vezes é eficaz apenas localmente. A incerteza está presente. Basta uma pequena variação (pequena, aos olhos do professor) para que o esquema aparentemente adquirido permaneça silencioso.
A transformação dos "algoritmos-scripts" em esquemas pessoais pode ir ainda mais longe. Eis um exemplo, que empresto da tese de Jorge da Rocha Falcão.

Um exemplo

Alunos do primeiro ano do ensino médio são solicitados a resolver vários tipos de problemas, provenientes de uma situação geral, na qual estudantes, para ganhar a vida, trabalham em uma agência de viagens. O salário é composto por três partes: uma parte proporcional ao número de horas trabalhadas, uma parte proporcional ao número de bilhetes vendidos e uma parte fixa. Podemos, por exemplo, ter que calcular o número de horas trabalhadas quando conhecemos o valor da hora de trabalho, o salário, a parte fixa, o número de bilhetes vendidos, e o preço por bilhete; ou ainda, o prêmio por bilhete vendido quando conhecemos os outros parâmetros; etc. Os parâmetros variam de uma agência para a outra, e podemos também comparar as vantagens e as desvantagens das agências, uma em relação à outra. Eis aqui um protocolo coletado por Falcão (tratava-se de calcular o prêmio por bilhete):

O aluno escreve (xH x 1H) + (xB x 1B) + parte fixa = S

A interpretação desse caso é simples:

xH	significa o número de horas trabalhadas	e 1H	o salário horário
xB	significa o número de bilhetes vendidos	e 1B	o prêmio por bilhete
S	significa o salário total	e a parte fixa é escrita por extenso	

Este sentido é bem dominado pelo aluno, já que ele consegue calcular o prêmio por bilhete. Mas seu simbolismo não é estável. Não somente ele usa, na mesma linha, abreviações (letras) e palavras não abreviadas, assim como a letra H e a letra B com sentidos não numéricos, mas ele vai, em seguida, modificar seu simbolismo. Depois de ter efetuado vários cálculos com os dados numéricos fornecidos pelo experimentador, ele vai escrever:

S – (xh x 1h + c) / b = B

A necessidade de dividir por b a expressão S – (xh x 1h + c) conduz o aluno a não usar o parêntese relativo à parte do salário relativa aos bilhetes vendidos, e a usar localmente uma sintaxe correta: b no denominador. Ao mesmo tempo, ele não se constrange em conservar a antiga simbolização para a parte do salário que corresponde às horas trabalhadas, e em usar, agora, uma letra minúscula para designar a unidade *hora* (no lugar de uma letra maiúscula na expressão inicialmente escrita).

6. CONCLUSÃO

O sentido são os esquemas, dizia Piaget; podemos acrescentar que, se os esquemas se referem a categorias de situações, o sentido é também as situações. Então, como pensar o conjunto das relações entre situações, esquemas, objetos, conceitos, invariantes operatórios, formas de linguagem e signos, com sua dupla face de significantes e de significados?

A primeira relação fundamental é a que liga situações e esquemas. Por quê? Porque o conhecimento é adaptação, e nós nos adaptamos a situações, e não apenas a objetos. E os meios desta adaptação são as formas de organização da atividade de que nós dispomos: os esquemas.

A segunda relação fundamental é a que liga os objetos e suas propriedades às situações nas quais eles se inscrevem. Mas a identificação destes objetos supõe que, nos esquemas, existam conceitos-em-ato (predicados e objetos, ou ainda, funções proposicionais e argumentos), cujas funções cognitivas são, ao mesmo tempo, a de coletar e selecionar a informação pertinente, e a de serem os tijolos constitutivos dos teoremas-em-ato. Estes últimos são, por definição, “proposições sobre o real, consideradas como verdadeiras”, enquanto que os conceitos-em-ato não são suscetíveis de verdade ou de falsidade. São os teoremas-em-ato que permitem compreender que a atividade em situação é ao mesmo tempo regulada e alimentada por inferências. O fato de que eles sejam considerados como verdadeiros significa que podem existir (e existem, efetivamente) teoremas-em-ato falsos. O erro na ação pode, então, resultar da evocação em situação de conceitos não pertinentes ou insuficientes, e de teoremas errôneos.

A terceira relação fundamental é a que liga, na língua, primeiramente, e também em todo o sistema semiótico, os significantes e os significados. Esta relação não é unívoca, e as ambiguidades da língua existem. Entretanto, quaisquer que sejam as circunstâncias, a língua permite a comunicação, sem grandes incômodos, no interior de uma comunidade linguística dada, pelo menos em relação às atividades e aos conhecimentos não muito problemáticos.

A última relação fundamental é a que liga os invariantes operatórios e os significados da língua, ou do sistema de signos utilizado. Esta relação não é unívoca, e existem grandes lacunas, eventualmente, entre as formas operatórias do conhecimento, que são os invariantes operatórios, e as formas predicativas, que são o léxico e a sintaxe da língua (e de qualquer outro sistema de signos). As pesquisas sobre o trabalho e sobre a educação mostram que nós só estamos em condições de expressar por meio de palavras uma parte dos conhecimentos que usamos na ação; e podemos até mesmo raciocinar formulando as coisas apenas de maneira falsa ou inconsistente. É o que mostra o exemplo exposto acima: o aluno raciocina sobre os invariantes operatórios que lhe permitem dar sentido a seus escritos, localmente, e se preocupa pouco com o sentido convencional dos símbolos algébricos.

Existem, então, três fontes de lacunas entre o real e os signos:

- a lacuna entre o real e os invariantes operatórios,
- a lacuna entre os significados e os significantes da língua,
- a lacuna entre os invariantes operatórios e os significados.

E, apesar disso, nós nos comunicamos! Isto só é possível porque, ao mesmo tempo em que existem lacunas, existem também homomorfismos parciais nas três correspondências que acabaram de ser evocadas. O sistema de categorias com o qual nós representamos as situações, os objetos, suas propriedades e relações, provém, essencialmente, da atividade e, consequentemente, dos esquemas e dos invariantes operatórios. Estas categorias podem corresponder a regularidades perceptivas relativamente complexas, mas diretamente acessíveis; elas são, assim, o produto de construções conceituais, e da imaginação, principalmente na ciência. Os signos são os meios de estabilizar os sistemas de invariantes dos quais os indivíduos de uma mesma comunidade têm uma experiência direta, mas também de permitir a formação de invariantes de um alto nível de construção, em relação aos quais seria impossível comunicar-se sem os signos.

Não colocar os signos no ponto de partida do questionamento sobre a conceitualização, não leva a diminuir sua importância.

REFERÊNCIAS

FREGE, G. (1969). *Les fondements de l'arithmétique*. Paris: Éditions du Seuil. Original de 1884.

FREGE, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques*. Paris: Éditions du Seuil.