CONSTRUTIVISMO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA[1]

Gérard Vergnaud[2]

O problema não é somente o de mostrar que as ideias não existem desde toda a eternidade e que estariam na cabeça dos homens à espera de serem lembradas, como pensava Platão, nem que elas surgiriam de uma simples leitura empírica do real, como pensava Hume. É necessário ir além disso e tentar compreender por que e como Platão e muitos matemáticos até hoje puderam adotar tal posição epistemológica, e por que Hume e outros cientistas puderam adotar a posição inversa. Farei, mais adiante, uma tentativa neste sentido.

A epistemologia da matemática é uma coisa; a epistemologia da aprendizagem da matemática é outra, o que, de certo modo, nos diz algo mais a respeito: baseando-se completamente na primeira, ela estuda, no decorrer do tempo, as filiações e as rupturas, ou seja, justamente esse movimento do pensamento, que a história também estuda, mas em um período mil vezes mais longo e por meio das obras de matemáticos adultos. O estudo da aprendizagem da matemática oferece um atalho surpreendente.

Kronecker dizia que Deus havia dado aos homens o número inteiro e que o homem havia feito o resto. É necessário reconhecer, hoje, que ele nem sequer deu o número inteiro, como também, aliás, não deu os conceitos de relação de equivalência e de relação de ordem, cujo desenvolvimento precede e acompanha o do número. Todos esses conceitos foram construídos pelo homem e pela criança no decurso de suas atividades.

Eles não foram e nem sempre são explícitos, e isto é o que pode levar os matemáticos a julgar que as crianças não fazem matemática nos primeiros anos do ensino fundamental. Julgamento estranho quando se sabe que as crianças do quinto ano aprendem, atualmente, técnicas operatórias que, na época do Renascimento, uma ínfima minoria das pessoas,

---

[1] Traduzido por Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares, do original em francês : VERGNAUD, G. (2001). Constructivisme et apprentissage des mathématiques. Actes du Colloque *Constructivismes : Usages et Perspectives en Éducation*. Genève: Service de la Recherche en Education, cahier 8, 143-155.

[2] Diretor emérito de pesquisas (psicologia cognitiva e didática), Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS), Paris, França.

inclusive os matemáticos, era capaz de praticar. Durante muitos séculos, os matemáticos árabes tiveram um avanço significativo em relação aos matemáticos europeus; depois, os italianos em relação aos franceses e aos alemães: aprendiam-se as multiplicações e as divisões nas universidades italianas, e pouco na França e na Alemanha. O próprio Montaigne não sabia calcular. Como podemos não ser construtivistas?

Que objetos matemáticos são construídos pelas crianças e como esta construção se manifesta?

Gostaria de defender três teses distintas, embora sejam elas ligadas umas às outras.

1 - A primeira tese é a de que os conceitos matemáticos são de uma grande diversidade, que seu desenvolvimento sustenta o desenvolvimento de conceitos não estritamente matemáticos, e que esses conjuntos evolutivos de conceitos formam sistemas a cada momento do desenvolvimento da criança. Foi o que me fez falar de campo conceitual.

2 - A segunda tese é a de que a conceitualização é um processo vital, motor e consequência da adaptação, que acontece primeiramente e antes de tudo nas situações: situações nas quais o sujeito pode e deve agir, perceber e prever. São necessários, então, conceitos teóricos que permitam identificar o lugar da conceitualização na ação. O conceito de esquema é essencial para tanto, assim como o de invariante operatório.

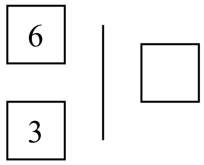
3 - A terceira tese é a de que as situações às quais a criança é confrontada, são, em maioria, fabricadas pela cultura (notadamente pela escola, mas não somente por esta); além disso, as palavras, os enunciados, os argumentos impregnam, com sua marca, a maneira pela qual são identificados os objetos matemáticos, suas propriedades, suas transformações. A linguagem também é, portanto, essencial, e podemos até mesmo dizer, com Vigotski e Piaget, que um conceito não é totalmente um conceito, enquanto não for ele formulado, juntamente com suas propriedades.

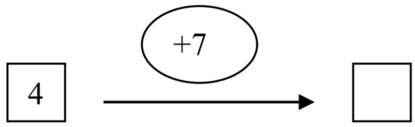
Mas então, o que existe antes?

Antes de responder a esta pergunta, preciso ilustrar o quadro com alguns exemplos de campos conceituais.

Primeira tese: a da variedade dos conceitos que colaboram com a conceitualização de um mesmo campo conceitual.

Eu estudei muito a solução de problemas de adição e de subtração e, por certo, este é um dos exemplos mais conhecidos, hoje. Sabe-se, notadamente, que a solução dos problemas de adição e de subtração não está baseada somente na adição e na subtração dos números, mas igualmente em conceitos que permitem compreender as relações entre quantidades e entre grandezas, assim como entre as transformações e as relações de relações que delas derivam. Os dois modelos prototípicos da adição, aqueles que, de início, começam a fazer sentido para as crianças, são, de um lado, a reunião de duas parcelas conhecidas em um todo desconhecido e, de outro, a transformação conhecida de um estado inicial conhecido em um estado final desconhecido.

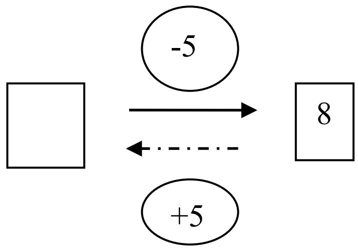


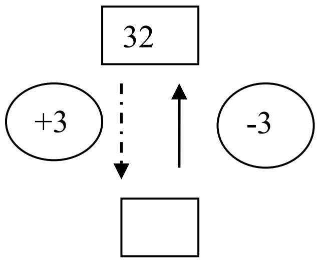


Seis meninas, três meninos; quantas crianças ao todo? Pedro tinha quatro bolinhas de gude, ele ganha mais sete; quantas ele tem agora?

Dizer isto é declarar que os conceitos de parte, de todo, de estado, de transformação, de estado inicial e de estado final são indispensáveis para a conceitualização da adição dos números, a qual, aliás, baseia-se nos conceitos de cardinal, de ordem e de iteração da unidade. Porém, e já que os problemas da adição nem sempre levam a esses dois protótipos, é dizer também que outros conceitos terão que ser formados progressivamente pelas crianças:

- por exemplo, o da inversão de uma transformação: se eu gastei 5 francos na confeitaria e se tento saber quanto eu tinha antes, é necessário acrescentar os 5 francos gastos ao quanto tenho agora, 8 francos, por exemplo;
- os de relação de ordem quantificada, de grandeza de referência, de grandeza referida, de relação recíproca: se minha prima me diz que seu pai tem 32 anos e que ele tem 3 a menos que sua mãe, eu devo entender que a idade da mãe é o referente, que a idade do pai é o referido, e que a relação deve ser invertida para encontrar o referente a partir dos dados: adição de 3 anos de menos.





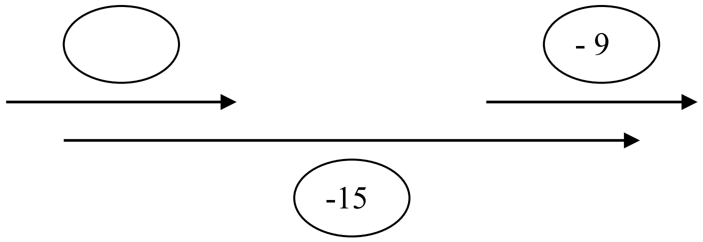
A subtração e a adição parecem andar de mãos dadas; porém, essa é uma ideia que só é verdadeira em parte. A subtração é, exatamente, o *alter ego* da adição, em se tratando de transformações do tipo ganhar/perder, aumentar/diminuir; ou em se tratando de transformações ou relações recíprocas, como no exemplo da idade da mãe e como no exemplo do cálculo do dinheiro que eu tinha antes de ir à confeitaria.

Contrariamente à adição, que tem dois protótipos, o protótipo da subtração é único, a diminuição conhecida de uma quantidade inicial conhecida: eu tinha 12 francos e gastei 9. Quanto me resta?

A extensão de uma operação de subtração a classes de problemas mais complexos supõe, então, a formação de conceitos complementares: os de complemento e diferença e, naturalmente, os de inversão e reciprocidade.

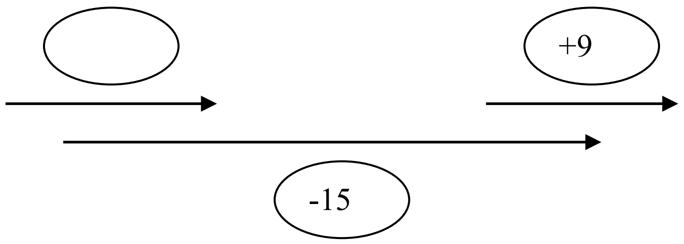
E as coisas não param por aqui. De fato, desde que devamos fazer transformações e relações, encontramos o problema das composições de números de sinais contrários, e de decomposição de um número em números de sinais contrários. Para o matemático, trata-se de números relativos, positivos e negativos; já o aluno, antes que lhe expliquemos como podemos expressar em equação em Z (conjunto de números relativos), um problema que comporta transformações e relações positivas e negativas, ele só pode recorrer a um tipo de equivalente conceitual dos números relativos, cuja importância é inevitavelmente limitada aos casos mais favoráveis:

Por exemplo, se eu digo a um aluno de 12 anos que Roberto perdeu ao todo 15 bolinhas de gude durante o dia, e que ele perdeu 9 durante a tarde, este aluno pode reconstituir facilmente que Roberto perdeu 15 – 9 = 6 pela manhã.



Se Roberto perdeu ao todo 15 bolinhas e perdeu 22 à tarde, já é um pouco mais complicado para um aluno de 12 anos reconstituir o que aconteceu pela manhã porque o todo é menor do que a parte (em valor absoluto).

Mas se Roberto perdeu no total 15 bolinhas e ganhou 9 durante a tarde, este problema se torna bem difícil. A maioria dos alunos de 12 anos fracassa para descobrir que ele perdeu 15 + 9 = 24 pela manhã.



É uma adição contra intuitiva! Com isso, quero dizer que os conceitos anteriormente formados não permitem facilmente, aos alunos de 12 anos, compreender as relações suscetíveis de conduzir o raciocínio necessário à escolha da adição.

No processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, podemos às vezes encontrar uma solução local por meio de generalizações de sentido e pela formação de conceitos derivados dos conceitos anteriormente formados: então se trata de filiação! Mas podemos também nos encontrar na impossibilidade de operar tais mudanças de significado: então se trata de ruptura! Uma das finalidades da teoria dos campos conceituais é precisamente a de propor um quadro para o estudo das filiações e das rupturas.

A desestabilização pode ser bastante forte; a didática da matemática gosta de tais desestabilizações, e procura meios que permitam aos alunos superar uma etapa. Conhecemos desestabilizações análogas na história da matemática, por exemplo, com o lento reconhecimento dos números negativos, ou na contabilidade em débito e crédito com a dificuldade de compreender o que é um balanço: por que acrescentamos ao passivo o capital, os lucros, as amortizações e as reservas?

Apresentarei, agora, um segundo exemplo de campo conceitual, em geometria, de forma a não repetir o exemplo da proporcionalidade simples e múltipla que já apresentei muitas vezes. Eu me contentarei em dizer que, estranhamente, as dificuldades conceituais encontradas pelos alunos na compreensão das estruturas multiplicativas são bem diferentes das dificuldades encontradas com as estruturas aditivas. A razão principal é que a relação de base dos problemas de multiplicação e de divisão é uma relação de quatro termos, e não de três, na qual intervêm, ao mesmo tempo, relações de escalas, sem dimensão, relativamente fáceis de manejar, e quocientes de dimensões, bem mais difíceis de extrair, inverter e compor.

A geometria é uma disciplina escolar que tem a reputação de ser difícil. Entretanto, ela se baseia em uma experiência importante, a do espaço. Isso talvez explique tal reputação, já que os conhecimentos intuitivos, assim construídos na experiência espacial, não correspondem exatamente aos conhecimentos analíticos do geômetra. Nossa experiência do espaço é tridimensional; a geometria classicamente ensinada é primeiramente bidimensional; e não sabemos hoje como fazê-lo de outra forma.

Pierre Gréco, e aproveito esta ocasião para homenagear sua memória, tinha o hábito de dizer que uma das dificuldades da geometria é a de coordenar entre si três conhecimentos sobre o espaço, distintos um do outro: a geometria das figuras (a da família dos quadriláteros, por exemplo), a das posições (as coordenadas e as relações de incidência entre objetos geométricos) e a das transformações (rotação, translação, simetria e projeção).

Tomemos o exemplo do teorema de Tales, estudado por Nathalie Pfaff, em sua tese já há muitos anos. Temos as figuras: retas paralelas, frequentemente triângulos e também intersecções. Temos as posições: pontos na intersecção de duas linhas, eventualmente um cume, relações de equivalência entre posições (estar na mesma reta, na mesma secante, na mesma paralela). Temos transformações: projeções, concretizadas pelas paralelas, e homotetias, eventualmente, se as secantes se cortarem e se, assim, o centro da homotetia for visível no desenho (figura 1); é necessário, às vezes, raciocinar somente sobre as projeções: os raios do sol, no caso da primeira publicação atribuída a Tales sobre a medida da altura da grande pirâmide com a ajuda da medida da sombra projetada por um bastão e pela pirâmide. (Figura 2).

Figura 1

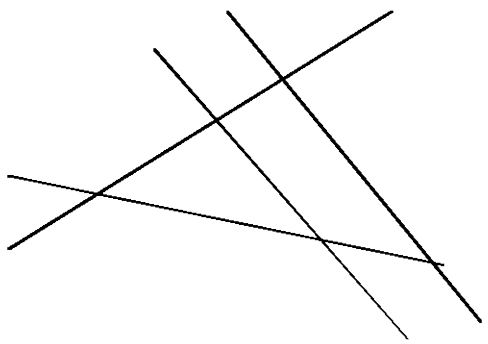
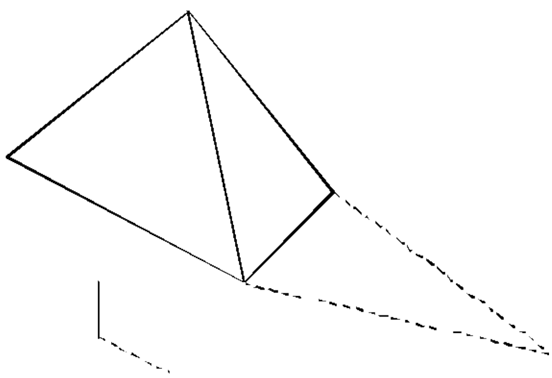


Figura 2



Os resultados de Nathalie Pfaff mostram que os alunos têm dificuldades muito grandes em utilizar as propriedades do teorema de Tales quando as secantes não são cortadas na figura

(figura 3); mesmo quando elas são cortadas e que eles podem, assim, usar a homotetia, eles não se sentem à vontade; o único caso realmente acessível à maioria dos alunos é o caso da simetria central, que é um caso de igualdade (figura 4).

Figura 3

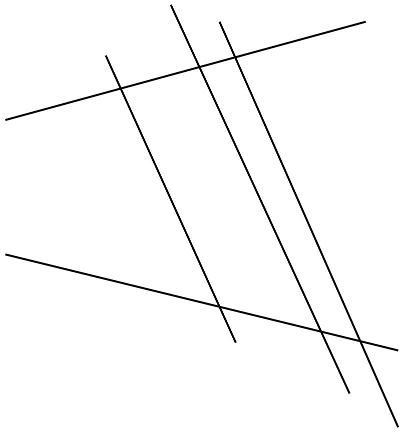
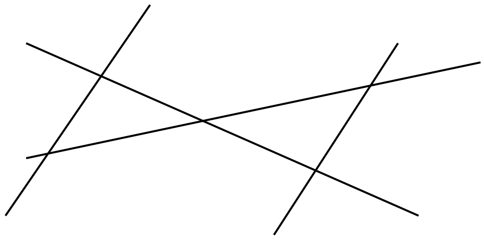


Figura 4



É um ponto interessante constatar que a conceitualização que subentende o raciocínio e a ação é sempre local, no início. A categoria dos casos assim compreendidos pode ser mais ou menos vasta. Ela nunca é imediatamente completa e são necessárias operações complementares de pensamento para estender o âmbito dos esquemas assim construídos.

Segunda tese: a conceitualização é um processo vital.

O conhecimento é adaptação, ensinou-nos Piaget. Mas o que se adapta e ao quê? O processo de assimilação/acomodação é visto por Piaget nos termos gerais sujeito/objeto ou sujeito/ ambiente.

É necessário ser mais preciso. São os esquemas que assimilam e acomodam, ou seja, acomodam formas de organização da atividade. Piaget é o pai mais direto dessa ideia. Contudo, curiosamente, ele não desenvolveu o conceito par do conceito de esquema, aquele de situação. Na verdade, é às situações que o esquema se adapta, e um esquema constituído e estabilizado pode ser considerado como uma forma invariante de organização da atividade para uma dada classe de situações.

Logo, é o par situação-esquema que está no centro do processo de construção, ou ainda, de apropriação das competências e conhecimentos. A escola é, em muitos aspectos, depois da família, mas de maneira mais sistemática e mais ambiciosa, uma provocação. E as provocações tomam, primeiramente, a forma de situações.

Em um campo conceitual, pelo menos parcialmente identificado, é importante apreciar a oportunidade de tal ou tal provocação. É necessário um tempo para fortalecer os esquemas já construídos, um tempo para desestabilizá-los visando enriquecê-los ou visando permitir à criança que desenvolva novos esquemas.

Para ser concreto, eu vou dar um exemplo de um esquema relativamente precoce e de extensão considerável, à qual ele se presta durante a aprendizagem. Trata-se do esquema de contagem. As crianças de cinco anos são capazes de contar pequenos conjuntos (pessoas em uma sala, ou balas sobre a mesa): um, dois, três, quatro... quatro! Dois conceitos matemáticos estão em ação em tal comportamento: o conceito de correspondência biunívoca e o de cardinal. Eles não são explícitos. A correspondência biunívoca se manifesta pela regra de que é necessário contar todos os elementos e não esquecer nenhum; o cardinal, pela repetição da última palavra-número pronunciada (ou por qualquer outra forma que permita ressaltar que ele tem um *status* particular como, por exemplo, a mudança do tom). São os conceitos-em-ato.

Eis aqui uma história interessante, cuja autenticidade eu garanto, que aconteceu durante a fase de preparação da copa do mundo. Os organizadores estavam procurando estádios suficientemente grandes para acolher um grande número de espectadores. Alguém sugeriu o estádio de Nantes. Telefonaram, então, para o diretor; este confessou não conhecer o número de lugares de seu estádio, e contratou dois empregados temporários para fazer a contagem. Foram-lhes necessários dois dias inteiros. O esquema que eles adotaram não podia ser o da criança de cinco anos: eles puderam dividir a tarefa e recorrer, em seguida, a adições; eles puderam usar a numeração escrita para memorizar os números e adicioná-los; eles puderam simplificar a tarefa nas partes retangulares, multiplicando por número de filas o número de lugares por fila; eles puderam até mesmo recorrer, para os cantos do estádio, à fórmula que permite calcular o número médio de lugares por fila (máximo mais mínimo, dividido por dois).

Nessa atividade cooperativa, outros esquemas foram necessariamente evocados: para organizar o trabalho, para controlar, etc. Podemos imaginar, por exemplo, os dois empregados em um canto do estádio, discutindo os méritos de uma ou outra maneira de proceder, ou de controlar a coerência dos resultados

Eles usaram, então, esquemas de diálogo e de argumentação, com aspectos inevitavelmente afetivos, já que a afetividade é onipresente na atividade (gestos, mímicas, enunciados que revelam sedução ou autoridade, etc.).

O conceito de esquema é central para todos os registros da atividade: gestos, raciocínios científicos e técnicos, interações sociais e afetivas, diálogos e outras produções do sujeito.

Portanto, é necessário, explicar um pouco mais o conceito de esquema e dar-lhe uma definição. O esquema é um universal, já que ele se refere a uma classe de situações e que ele ocasiona uma classe de condutas diferentes, adaptadas às situações particulares encontradas. O que é invariante é a organização, não a atividade. Esta última é flexível e depende dos valores das variáveis de situações, que são contingentes para o aluno, enquanto o professor as escolheu intencionalmente, com conhecimento de causa. O esquema é uma unidade funcional: seus componentes não são, por si sós, funcionais, mas, nem por isso são menos interessantes de serem analisados e de ali serem diferenciadas suas quatro categorias de componentes, todas indispensáveis.

- Os objetivos, subobjetivos e antecipações que formam a parte intencional e motivacional do esquema.
- As regras de ação, de coleta de informação e de controle que são engendradas progressivamente pela atividade.
- Os invariantes operatórios (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) que permitem selecionar os objetos e as relações pertinentes e gerar regras e objetivos a partir dessa informação.
- As possibilidades de inferência, que também são constitutivas da atividade em situação, já que há sempre um grande número de inferências *hic et nunc.*

Tomemos o exemplo da compreensão de texto. O que lemos? Em que ordem e com qual atenção seletiva? O que relemos? Com quais questões? Para interpretar os dados textuais, é necessária uma certa concepção do que é uma narração, uma explicação, uma argumentação, ou um texto de problema.

Dentre os exercícios de geometria que nós elaboramos no Monitor de Matemática publicado por Nathan, cuja função é a de permitir aos professores avaliar as competências dos alunos do terceiro, quarto e quinto ano, encontramos exercícios nos quais é necessário produzir um desenho a partir de um texto, formado por instruções e informações e, reciprocamente, exercícios nos quais é necessário reconstituir um cenário possível para a construção de uma figura (que contenha, por exemplo, um quadrado e um círculo, diagonais, rotações).

A perspectiva construtivista é indispensável para analisar o desenrolar da atividade. Nos dois sentidos! Ela recorre, diretamente, em situação, aos esquemas de produção, seja de um enunciado, seja de uma figura geométrica (com os instrumentos usuais que são a régua, o esquadro, o compasso, ou com instrumentos de um programa como o Cabri Géomètre, por exemplo).

Ora, a perspectiva construtivista não se refere somente à atividade de construção a curto prazo. Mas, também, ao desenvolvimento cognitivo, a longo prazo, de durações bem mais longas, como é o caso dos grandes experts profissionais da concepção ou da manutenção na indústria, dos grandes médicos, dos grandes advogados, dos grandes cientistas ou artistas e, claro, dos alunos.

Da mesma maneira, a história da matemática é marcada por várias etapas de construções e de “desconstruções”, como se diz hoje. É interessante tentar avançar na análise deste processo, a fim de entender melhor, mais adiante, na conclusão, as razões pelas quais é fácil adotar, sem pensar muito, uma postura platônica ou empirista.

Terceira tese: as situações às quais a criança é confrontada são, para a maior parte delas, fabricadas pela cultura.

As situações suscetíveis de desestabilizar os esquemas e as concepções dos alunos são situações que resultam da cultura: da cultura da sociedade inteira, e da cultura da escola, em particular. Esta última não está totalmente em sintonia com o andamento da sociedade. Em certos aspectos, ela está atrasada e resulta de um processo social de transposição, do qual existem exemplos espetaculares em matemática, tal como foi evidenciado por Chevallard e alguns outros pesquisadores.

É necessário também abordar, mesmo que brevemente, o problema da linguagem e das ferramentas simbólicas. Vigotski dava à linguagem uma importância decisiva no ensino e na aprendizagem dos conceitos científicos, importância esta evidentemente subestimada por Piaget. Piaget, entretanto, no fundo concordava com Vigotski que um conceito não era plenamente um conceito enquanto não fosse formulado. Ambos também concordavam que o processo de conceitualização não seria completamente circunscrito pelas formas de linguagem. Como podemos retomar este problema hoje?

É impossível evitar a ideia de que o léxico e as formas sintáticas contribuem fortemente para a estabilização e para o reconhecimento dos invariantes operatórios. Mas é necessário, ao mesmo tempo, avaliar que a fonte da conceitualização está, primeiramente, na ação e na percepção, ou seja, nos esquemas.

É porque identifica objetos, propriedades, relações, transformações, ações no mundo, que a criança pode aprender a falar. Muito rapidamente, a linguagem pode exercer efeito de *feedback* nesse processo de identificação; porém, a linguagem não pode ocorrer em primeiro lugar. Os símbolos matemáticos também não são os primeiros; e, portanto, para compreender o lugar da linguagem na comunicação e na conceitualização, faz-se necessário recorrer não somente à teoria saussuriana da língua como sistema de significantes/significados, mas também à teoria dos esquemas e dos invariantes operatórios.

A análise de certas formas predicativas vai permitir à análise mais avanços no que concerne à perspectiva construtivista.

Partamos primeiramente da forma operatória do conhecimento; existe, evidentemente, uma diferença notável de complexidade entre os esquemas que permitem desenhar a parte simétrica da meia-fortaleza (figura 5) e os que são necessários para desenhar o triângulo simétrico do triângulo ABC em relação à reta “d” (figura 6). Sobre isso, nada mais vamos dizer aqui, e voltemo-nos, sobretudo, aos quatro enunciados suscetíveis de serem pronunciados pelo professor e, eventualmente, pelos alunos

Figura 5

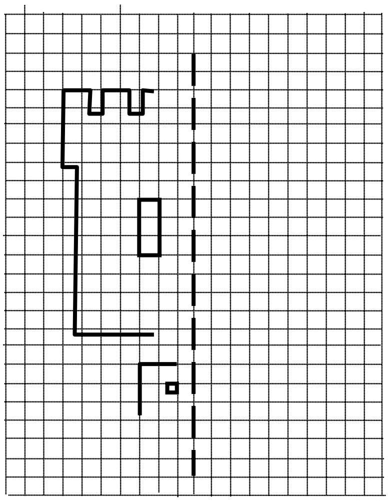
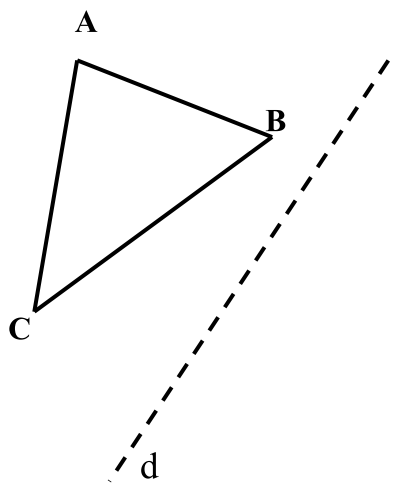


Figura 6



- A fortaleza é simétrica.
- O triângulo A’ B’ C’ é simétrico do triângulo ABC em relação a “d”.
- A simetria conserva os comprimentos e os ângulos.
- A simetria é uma isometria.

A percepção da fortaleza pode conduzir à formulação de um enunciado verdadeiro, que aqui consiste em se atribuir à fortaleza a propriedade de ser simétrica. A formulação já se torna mais complexa, no segundo enunciado, o qual contém um predicado de três lugares. No terceiro enunciado, o conceito-predicado simétrico se tornou um conceito-objeto, que se traduz por uma operação linguística de nominalização. Esse novo objeto é um objeto abstrato, totalmente construído que, por sua vez, não tem menos propriedades. Isto só é possível, justamente, porque ele foi construído como objeto. E são as propriedades de conservação desse novo objeto que dão lugar, no quarto enunciado, à construção de um novo objeto de pensamento, a isometria (novamente graças a uma operação de nominalização).

Não se pode parar o movimento de conceitualização. Evidentemente, a linguagem permite construções que seriam bem difíceis de serem feitas com invariantes operatórios não formulados, os quais permitem organizar a ação.

Resumindo, as formas predicativas do conhecimento resultam elas próprias de construções, mas as formas operatórias, que permitem agir e obter sucesso, se baseiam em conceitualizações que permanecem, em parte, totalmente implícitas e até mesmo inconscientes, em alguns casos. Essas conceitualizações vão, assim, além do que as línguas e as outras formas simbólicas podem expressar.

Ao contrário, a linguagem permite construir novos objetos que não correspondem diretamente a percepções e que, entretanto, têm lugar nas formas predicativas perfeitamente recebidas em uma determinada cultura. Na verdade, elas são recebidas por aqueles que compartilham o mesmo sistema da língua. Evidentemente, esse não é o caso das crianças e do professor, sobretudo para o vocabulário científico e as formas sintáxicas complexas.

É o sistema de invariantes operatórios (e, então, de esquemas) de cada um de nós que deve ser colocado em relação com os significados da língua utilizados na comunicação. Sozinhas, as palavras não são conceitos. Elas só se tornam conceitos quando se baseiam na ação e na experiência individual dos sujeitos.

Concluindo, e a partir dessas considerações, podemos dizer que o conceito de representação abrange quatro sentidos complementares:

1 - *O fluxo da consciência*, do qual todos nós temos a experiência, mas que pode corresponder tanto à imaginação quanto à percepção. A percepção é representação, e a identificação perceptiva dos objetos e de suas propriedades é evidentemente essencial na nossa concepção da representação. Quando Piaget escreveu *A formação do símbolo,* ele mostrou interesse, sobretudo pela imaginação; e ele insistiu em alguns dos critérios que, segundo ele, fazem com que a imitação implique a representação: a imitação diferida no tempo, a imitação de um gesto até então ausente no repertório do bebê, a brincadeira de faz-de-conta (que implica a evocação dos objetos em sua ausência).

É necessário ir mais longe. A construção de objetos imaginários não é oriunda somente do sonho e da fantasia poética, mas ela é também uma mola fundamental da construção científica. Ninguém jamais viu as forças de interação e as órbitas entre os planetas, nem os espaços vetoriais, nem mesmo o número quatro. Todos esses conceitos são construções.

2 - O segundo sentido do termo "representação" concerne *ao sistema de categorias* (classes de objetos, propriedades, relações, transformações e processos) e de *teoremas-em-ato*, sistema que permite ler e interpretar os fenômenos do mundo, em primeiro lugar, os que resultam da atividade do sujeito. É aqui que se situam os invariantes operatórios.

3 - O terceiro sentido concerne *aos sistemas de significantes/significados* (em primeiro lugar, a linguagem natural), que permitem explicitar em formas predicativas as relações entre os objetos do mundo, e comunicar a respeito deles.

4 - O último sentido, enfim, essencial a meu ver, é o do *sistema de esquemas* (hierarquicamente organizado) que, por si só, não dá à representação uma concepção dinâmica e funcional. Esse sistema está aberto a infinitas possibilidades de reversão, de combinação, recombinação e descoberta.

A representação não é nem um dicionário, nem uma biblioteca; é um repertório de esquemas ativos, aberto à contingência das situações encontradas.

Minha última observação será para dizer que os objetos, uma vez estabelecidos, não podem ser considerados como puras construções hipotéticas. O processo de reificação (ou de coisificação) atravessa todo o campo cognitivo. Uma vez estabelecida, a conservação das quantidades discretas acontece naturalmente; a evidência mudou de campo. A conservação é reificada. O mesmo acontece para o objeto permanente, para o número quatro, ou para o conceito de função, que foi explicitado somente tardiamente na história da matemática.

No fundo, é natural ser platônico quando se é matemático, pois os objetos matemáticos estão ligados por laços de necessidade com todo um sistema de conceitos cuja operacionalidade já está bem estabelecida. O peso da percepção na construção da evidência não alimenta somente o empirismo, que é, no fundo, uma generalização da ideia de leitura direta das propriedades do real; ele alimenta também o realismo idealista de Platão e dos matemáticos. Acabamos acreditando na existência do que acabamos de construir. Por mais construtivistas que sejamos, não pensamos nós que o número quatro vem a ser um objeto de pensamento legítimo por toda a eternidade? E, no final das contas, é cômodo esquecer que a letra “x” representa uma incógnita ou uma variável, e tratá-la, em um cálculo literal, como um objeto material: 2x mais 3x, é igual a 5x, assim como 2 bolinhas de gude mais 3 bolinhas de gude, é igual a 5 bolinhas de gude.

REFERÊNCIAS

PFAFF, N. (1995). *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès*. Thèse de Doctorat. Paris: Université de Paris 5.

VERGNAUD, G. (1995). L’enfant, la mathématique et la réalité. Berne, Peter Lang (1er. ed. 1981).

VERGNAUD, G.; Récopé, M. (2000). De Revault d’Allonnes à une théorie du schème aujourd’hui. *Psichologie Française*, 45, n. 1 (numéro spécial: *La Societé Française de Psychologie a Cent Ans*).